PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. 1. April 1920. Redaktionsschluß für No. 9 am 15. April 1920. 21. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Geipel, Die Transformation des wirklichen Raumes in den Sehraum. S. 169

E. Gehrcke, Über ein Modell zur Erklärung der Lichtemission. V. S. 172.

H. Th. Wolff, Betrachtungen über den radioaktiven Zerfall des Atomkernes. S. 175.

P. Debye, Die van der Waalsschen Kohäsionskräfte. S. 178.

W. Hahnemann u. H. Hecht, Die Grundform des mechanisch-akustischen Schwingungskörpers. (Der Tonpilz.) S. 187.

Besprechungen:

M. Planck, Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper. S. 192.

Personalien. S. 192.

Gesuche. S. 192.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Transformation des wirklichen Raumes in den Sehraum.

Von H. Geipel.

I.

Witte hat in seiner letzten Abhandlung über den Sehraum[1]) Gesetze aufgestellt, nach denen die Sehgröße eines Gegenstandes, wenn dieser sich vom Auge entfernt, in ganz bestimmter Weise von der Entfernung abhängen soll. Witte geht dabei davon aus, daß weder der Satz: „Die scheinbare Größe eines Gegenstandes entspricht dem Sehwinkel oder auch dem Netzhautbild und nimmt umgekehrt proportional mit der Entfernung ab“[2]) noch der „Sehwinkelaufhebungssatz“, nach dem ein Gegenstand, z. B. der Mensch in jeder Entfernung in seiner wirklichen Größe erscheint, gilt, sondern, daß diese mit der Entfernung eine Verkleinerung erfährt, wie es durch die Berechnung nach dem Ausdruck

$$B = \frac{\varrho}{\varrho + R}$$

geschieht, die v. Sterneck zugrunde legt. Danach soll ein Mensch z. B. in 100 m Entfernung um 1 Proz. kleiner als in seiner wahren Größe gesehen werden, in 1 km Entfernung ca. 9 Proz. usw. Dieser Ausdruck erscheint wieder in den von Witte aufgestellten Gesetzen[3]) in der Form des Verkleinerungsverhältnisses

$$V = \frac{E}{E + X}.$$

Die aus diesem Verkleinerungsverhältnis sich ergebende Hyperbel für die Abhängigkeit der Verkleinerung von der Entfernung ist also errechnet auf Grund der Annahme, daß für die Sehgröße der korrigierte Sehwinkelaufhebungssatz der psychologischen Wissenschaft gilt, d. h. also, daß der wirkliche Raum dem Auge als v. Sternecksсher — oder wie ihn Witte nennt: Laqueurscher Sehraum erscheint.

1) Diese Zeitschr. **20**, 389, 1919.
2) Diese Zeitschr. **19**, 142, 1918.
3) Witte, l. c. **20**, 389, 1919.

II.

Es erhebt sich die Frage, ob diese psychologische Erfahrung die Grundlage für eine Transformation des wirklichen Raumes XYZ auf den Sehraum $X'Y'Z'$ sein kann.

In alle diese Beobachtungen, wie sie an Dingen in der Natur, auch an geraden Landstraßen, Kanälen, Eisenbahngleisen usw. gemacht werden, geht ohne weiteres ein die Objektivität der Beobachtung vollkommen zerstörendes Moment ein, das meines Erachtens nicht zu umgehen ist, nämlich das Wissen von den Dingen, wie es durch eine lebenslange Erfahrung uns eigen geworden ist. Wir wissen, wie groß ein Mensch ist und wissen, daß die Abstände zwischen parallelen Eisenbahnschienen an allen Stellen gleich groß sind.

Es seien einige Beispiele angeführt. Wer aus der Ebene oder dem Hügellande kommt, weiß, wie ungeheuer man sich beim Schätzen von Entfernungen im Hochgebirge, z. B. den Alpen, vor allem über der Baumgrenze irrt und wie es nur einer vieljährigen Übung gelingen kann, einigermaßen das Richtige zu treffen. Warum? Es fehlen bekannte Größen, an denen man ein Maß für Entfernungen hat. Ein Messen ohne Maßstab ist ein Unding und so ist auch das Entfernungsmessen ohne Anhaltsgröße in der Umgebung eine Unmöglichkeit. Als ich zum erstenmal Gemsen sah, mußte mir ein Freund die Stelle genau mit dem Finger zeigen, wo sie sich in dem Kar auf der Schutthalde befanden. Sie waren für mich unsichtbar gewesen, weil ich nicht erwartet hatte, daß sie so klein wie Flöhe aussehen würden und wüßte ich nicht aus Büchern, wie groß eine Gemse ist, ich hätte es niemals aus dem Ge-

sichtseindruck heraus auch nur annähernd richtig ermessen können.

Wie steht es nun mit den Zahlen, die Witte für die Verkleinerung angibt[1])? Danach würde innerhalb von 1 km ein Ding noch nicht 10 Proz. kleiner gesehen werden als seine wirkliche Größe. Die Gemsen waren in Luftlinie $^1/_2$—$^3/_4$ km nach der Karte entfernt und erschienen fast punktförmig!

Blickt man durch ein kleines Fenster in eine große Hohlkugel von mehreren Metern Durchmesser, die innen vollkommen ohne einen Anhaltspunkt ist und erleuchtet wird, wie es bei der Messung der durch eine Bogenlampe erzeugten Beleuchtungsstärke in der Ulbrichschen Kugel geschieht, so glaubt man ins Unendliche zu sehen, in idealerer Weise als beim Sternenhimmel, bei dem dieser Eindruck durch Anhaltspunkte, die Sterne, gestört wird. Man verliert also in vollkommenster Weise jeden Maßstab für eine Entfernung, wenn ein uns in seiner Größe bekanntes Ding in der Umgebung der Blicklinie fehlt.

Es sei drittens die Frage aufgeworfen, ob dann, wenn der korrigierte Schwinkelaufhebungssatz des v. Sterneckschen Schraumes gelten würde, ein Bild einen natürlichen Eindruck machen könnte, das nach den Gesetzen der Perspektive gezeichnet ist. Das gleiche gilt von der Photographie.

III.

Die scheinbare Größe des Mondes.

Witte glaubt den Grund für die populäre Angabe, der Mond sehe aus wie ein Teller (20—30 cm Durchmesser), in der besonderen Konstruktion des Schraumes zu finden, mit andern Worten: in den Gesetzen zu sehen, nach denen der wirkliche Raum in den Schraum transformiert wird. Ich behaupte, daß ein solches Gesetz, wie es Witte ableitet[1]), höchstens relative Bedeutung besitzen kann, sich höchstens auf eine Reihe gleichartiger Dinge beziehen und in einem Raume gelten kann, in dem Dinge vorhanden sind, von deren Größe wir wissen. Es könnte also vielleicht gelten für die Breite eines Weges in verschiedenen Entfernungen, die Abstände paralleler Eisenbahnschienen, die Latten eines Zaunes usw. Diese Gesetze verlieren aber ihre Gültigkeit, sobald es sich um ein Einzelding handelt, das in verschiedenen Entfernungen gesehen wird und dessen Größe man nicht kennt, oder dessen Dimension nicht in die Größenordnung uns vorstellbarer Maße hineinfällt, wie z. B. beim Monde.

Wenn danach überhaupt die Frage: „Wie groß sieht man den Mond“ ihren Sinn verliert, sobald man die Umgebung wegdenkt, so hat doch die Frage Sinn, warum sieht man den Mond am Horizont größer als hoch am Himmel. Sehen wir den Mond am Horizont hinter einer fernen Baumgruppe aufgehen, so erscheint er groß, da seine Fläche die Baumgröße, die uns als etwas Großes bekannt ist, umschließt, geht er über dem Dach eines nahen Hauses auf, so erscheint er klein. Man kann dieselbe Beobachtung an dem einfachen Versuch machen. Man halte einen Maßstab gegen den Horizont und dann gegen den hohen wolkenlosen Himmel. Der Maßstab wird im zweiten Falle wesentlich kleiner erscheinen.

Woher kommt nun doch die unbestreitbar historisch gewordene Tellergröße des Mondes? Unser Auge, das nach dem Mond blickt und ihn in der Nähe fernerer Gegenstände sieht, erhält auf der Netzhaut ein kleines Bild des Mondes in der Umgebung andrer kleiner Bilder (Häuser, Bäume usw.). Derjenige nun, der durch Abgreifen angeben soll, wie groß ihm der Mond erscheint, in der Regel natürlich so, daß er auf seine Hände oder die nächste Umgebung und nicht auf den Mond blickt, oder das Auge auf unendlich akkommodiert, hat in seiner Umgebung Dinge, die große Netzhautbilder im Auge besitzen (Tisch, Stuhl, Bäume usw.), deshalb wird er eine Größe abgreifen, die ein Netzhautbild von einer ähnlichen Größenordnung erzeugt. Das kleine Netzhautbild eines Mondscheibchens von $^1/_2{}^0$ Öffnung in der Entfernung der Hände bei ausgestreckten Armen würde in einem zu großen Mißverhältnis zu den Netzhautbildern der umgebenden Gegenstände stehen. Würde man die Mondgröße nicht mit auf die Größe umfassenden Händen, sondern die Gegenstände am Horizont (Häuser, Stadt, Bäume) mit akkommodiertem Auge abgreifen lassen, so würde man wahrscheinlich andere Zahlen erhalten.

IV.

Wir wollen die beiden nachfolgenden Gedankenexperimente machen.

1. Versuch. Es werde im Raume, und zwar im absolut leer gedachten Weltraume ein Maßstab AB aufgestellt. Zwischen ihm und dem Beobachter sei aber keinerlei verbindende Gerade oder Ebene vorhanden, beide hängen also sozusagen in der Luft. Wir wissen, der Maßstab hat die Länge $AB = 1$ m. Bei geschlossenen Augen werde plötzlich der Maßstab in die 1000fache Entfernung gerückt und 1000fach ähnlich vergrößert, ohne daß der Beobachter etwas davon weiß. Er würde dann

1) Diese Zeitschr. 19, 144, 1918.

1) l. c. 20, 389, 1919.

unfehlbar angeben, der Stab ist an derselben Stelle geblieben und seine Größe ist 1 m.

2. Versuch. Man stelle 10 gleiche Maßstäbe im absolut leeren Raum auf, und zwar nebeneinander alle in gleicher Entfernung etwa 100 m vom Auge. Sie erscheinen dem Auge gleich groß. Man stelle sie nun hintereinander und zwar so, daß erstens die Entfernung des n ten Stabes vom Auge das n fache der Entfernung des ersten ist unter gleichzeitiger ähnlicher n facher Vergrößerung, zweitens jeder Stab soviel seitlich steht, daß kein vorangehender einen nachfolgenden verdeckt.

Nach der Tabelle, die Herr Witte für den v. Sterneckschen Sehraum angibt[1]), und wie aus der Kurve folgt, die Witte berechnet[2]), können die Stäbe nicht mehr gleich groß gesehen werden, sondern die ferneren müssen verkleinert erscheinen. Nimmt man zum Beispiel an, die Entfernung des ersten Stabes vom Auge ist 100 m, seine Größe 10 m, die des zehnten 1000 m bzw. seine Größe 100 m, so müßte letzterer nur 91 m groß erscheinen, um 9 Proz. kleiner als der 1. Stab.

Dafür liegt aber für das Auge kein irgendwie stichhaltiger Grund vor, denn das Auge kann nicht unterscheiden, ob die Stäbe nebeneinander oder hintereinander stehen, da eine gemeinsame Fußebene oder sonstige Bezugsebene für den Beobachter und die Stäbe fehlt, an der der Blick entlang gleiten kann. Für das Auge bleibt also nur der Eindruck auf der Netzhaut: Alle Stäbe aber erzeugen das gleiche Netzhautbild im Auge, denn nennt man a_1, a_2, $a_3 \dots a_n$ die Entfernung der Stäbe vom Auge, A_1, A_2, $A_3 \dots A_n$ ihre zu a_n proportionale Größe, B_1, $B_2 \dots B_n$ die Bildgröße, b die Entfernung der Netzhaut von der Linsenmitte des Auges, so ist in erster Annäherung

$$B_1 = b \cdot \frac{A_1}{a_1}$$

$$B_2 = b \cdot \frac{A_2}{a_2}$$

$$\vdots$$

$$B_1 = B_2 = B_3 \dots B_n.$$

Es fehlt jede Bezugsgröße in der Nähe der Stäbe, wodurch die ferneren größer und ferner erscheinen würden. Denn von dem „Erleben einer Sehgröße", die bedingen sollte, daß ein ferner stehender Stab verkleinert gesehen wird und daher ferner, kann hier nicht gesprochen werden.

1) l. c. 19, 144, 1918.
2) l. c. 20, 389, 1919.

V.

Es bleibt also wohl gegenüber der Unsicherheit des psychologischen Erlebnisses einer Größe nichts Sicheres als die physikalische Grundlage des Sehens im „Raume". Diese wird gegeben durch die Abhängigkeit der Größe des Netzhautbildes von der Entfernung des Gegenstandes vom Auge. Da die Entfernung b der Netzhaut von der Mitte der Augenlinse in erster Annäherung bei Akkommodation des Auges auf verschiedene Entfernungen als konstant angesehen werden kann, so muß bei gleichbleibender Gegenstandsgröße A, das Produkt aus Gegenstandsentfernung a und Bildgröße B, konstant sein, also

$$aB = \text{konst} \quad \text{(Fig. 1)}.$$

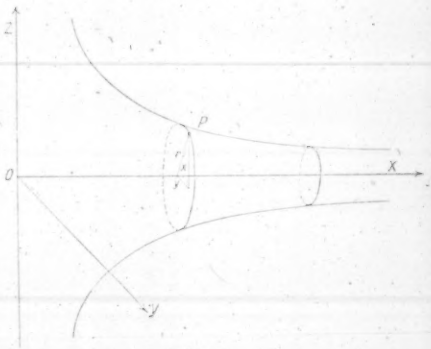


Fig. 1.

d. h. man erhält eine gleichseitige Hyperbel für die Abhängigkeit der Bildgröße B von der Entfernung a. Der Sehraum einer Schar paralleler Linien, die einen Kreiszylindermantel bilden, in dessen Achsenrichtung der Beobachter blickt, ist demnach ein mit hyperbolischer Krümmung mit wachsender Entfernung sich verengernder Raum.

Der Satz: „Die scheinbare Größe eines Gegenstandes entspricht dem Sehwinkel oder auch dem Netzhautbild und nimmt umgekehrt proportional mit der Entfernung ab"[1]), hat also nicht Gültigkeit. Betrachtet man den scheinbaren Abstand zweier paralleler Eisenbahnschienen in unmittelbarer Nähe, so sieht man deutlich ein hyperbolisches Auseinandergehen in nächster Nähe des eigenen Standpunktes. Noch eindringlicher ist die Beobachtung des Anwachsens der scheinbaren Größe einer herannahenden Lokomotive, wenn man dicht neben

1) l. c. 19, 142, 1918.

dem Gleise oder vor dem Ende einer Kopfstation steht. Man erkennt auch dann deutlich ein rascheres Anwachsen als ein der Entfernung proportionales bei großer Annäherung.

Die Gleichung für den Sehraum gleicher Abstände von der Blickrichtung OX ist durch die nachfolgende Gleichung gegeben. Der Sehraum ist eine Rotationsfläche, die durch Drehung eines Astes der gleichseitigen Hyperbel um die Blickrichtung OX entsteht (Fig. 1).

Es ist dann

$$r^2 = x^2 + z^2$$
$$x \cdot r = c,$$

wobei c die Konstante der gleichseitigen Hyperbel ist. Daraus folgt als Gleichung des Sehraumes

$$\frac{c^2}{x^2} = y^2 + z^2$$

eine Fläche 4. Grades.

Ändert sich der Parameter c, so erhält man den Sehraum für andre Orte gleichen Abstands von der Blickrichtung.

Zur Prüfung der hyperbolischen Gestalt des Sehraumes im obigen Sinne wurden einfache Messungen durchgeführt. Auf einem horizontalen Maßstab M_1 wurde ein kleiner Vertikalmaßstab A von ungefähr 3 cm Länge in verschiedener Entfernung vom Auge aufgesetzt und seine scheinbare Größe auf einem am Ende des Horizontalmaßstabes aufgestellten Vertikalmaßstab M_2 gemessen (Fig. 2). Eine der gemessenen Zahlenreihen ist in der Tabelle mitgeteilt und in Fig. 3 dargestellt. Sie zeigt deutlich die hyperbolische Abhängigkeit der scheinbaren Größe eines Gegenstandes von der Entfernung vom Auge. Die Ungenauigkeit, die sich in den Produkten $a \cdot B$ zeigt, die in der dritten Spalte beigesetzt sind, erklärt sich ohne weiteres aus der durch die Schwierigkeit der vom Auge aus erfolgten Projektion des Gegenstandes auf den Vertikalmaßstab. Sie wird besonders groß in den innerhalb der deutlichen Sehweite liegenden Entfernungen, da innerhalb dieser ein scharfes Bild nicht mehr zu erhalten ist.

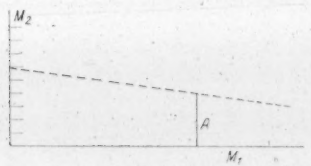


Fig. 2.

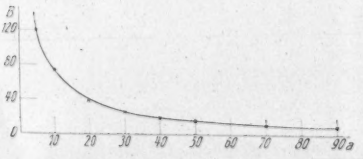


Fig. 3.

Gegenstandsweite a in cm	Bildgröße B	$a \cdot B$
230	3,5	805
210	3,7	777
190	4,0	760
170	4,6	782
150	5,2	780
130	6,0	780
110	7,0	770
90	8,6	774
70	11	770
50	15	750
40	19	760
30	25	750
20	38	760
10	73	730
5	120	600

Ich glaube damit erwiesen zu haben, daß eine solche Gesetzmäßigkeit, wie sie im korrigierten Sehwinkelaufhebungssatz v. Sternecks und in den Kurven, die Witte dafür berechnet, günstigenfalls nur für besondere Fälle gültig ist, keineswegs aber ein dem Sehen an sich immanentes Gesetz einer eindeutigen Transformation des wirklichen Raumes auf den Sehraum.

(Eingegangen 17. Oktober 1919.)

Über ein Modell zur Erklärung der Lichtemission. V [1]).

Von E. Gehrcke.

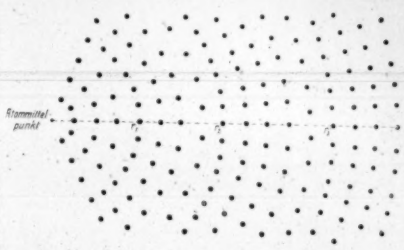
§ 14[1]). Den früheren Versuch zur Erklärung der Spektren, der durch die Umstände der letzten Jahre unterbrochen werden mußte, setze ich hier fort. Ich frage, wie auch früher, nach den physikalischen Gründen, die die Spektralerscheinungen bedingen, und nicht nach einem formalen Prinzip zur Ableitung der Gesetze. Ich erstrebe also eine, wenn auch tastende und vorläufige, Beschreibung dessen, was wirklich vorgeht, wenn Spektrallinien erzeugt werden, und konstruiere zu diesem Zweck ein anschauliches Modell, das zeigt, wie es vielleicht von der Natur gemacht wird, wenn ein Linienspektrum entsteht. Ich erreiche auf die-

1) Vgl. diese Zeitschr. 15, 123—127, 198—201, 341 bis 348, 838—839, 1914.

sem Wege eine systematische, zu weiteren Fragestellungen anregende Zusammenstellung der mannigfachen Beobachtungstatsachen, und habe ferner den Vorteil, logische Härten zu vermeiden, wie sie z. B. dem sonst so bedeutungsvollen, aber anschaulich nicht vollendeten Modell von Bohr eigen sind.

Es möge hier versucht werden, für die Existenz der Ringe, auf denen sich die Elektronen an einem Atom befinden, eine Vorstellung zu bekommen. Wir setzen voraus, daß der Äther atomistisch aufgebaut ist, lassen also die übliche Auffassung des kontinuierlichen Äthers nur als näherungsweise gültig für die gröberen Erscheinungen zu und nehmen ausdrücklich an, daß bei höherer Feinheit der Unterteilung eines Raumes, in dem sich Äther befindet, ein atomistischer Aufbau besteht; ein Analogon hierfür bieten uns die gewöhnlichen Flüssigkeiten und festen Körper, die hinsichtlich ihres hydrodynamischen und elastischen Verhaltens, also für die gröberen Erscheinungen, als kontinuierlich hingenommen werden können und vermittelst Differentialgleichungen beschrieben werden, die aber bei feinerer Beobachtung z. B. in chemischer und elektrischer Hinsicht, als aus diskreten Elementen aufgebaut angesehen werden.

Der atomistische Äther wird dann weiter als kristallinisch und als nicht ganz inkompressibel vorausgesetzt, also sein Aufbau ist nicht vergleichbar dem Zustand der Atome in einem Gase, sondern, demjenigen der Atome in einem Kristall. Ein im Äther befindliches, materielles Atom, z. B. ein Wasserstoffatom, ist ein Kraftzentrum, das die Ätheratome in seiner Umgebung beeinflußt und sie nach Art eines flüssigen Kristalls ordnet. Diese Wirkung des Atoms wird in große Entfernungen hin gehen, um nicht zu sagen ∞ weit, so wie schon Faraday sich vorstellte, daß sich jedes Atom durch das ganze Sonnensystem erstreckt[1]). Einem solchen atomistischen Aufbau des Äthers werden dann gewisse Sprungstellen im Atomgefüge eigen sein, d. h. ringförmige Bezirke, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt des Atoms ist; denn da die Ätheratome an gewisse Grenzen ihrer Entfernung voneinander gebunden sein werden, so müssen sie bei zentrischer Anordnung in konzentrischen Ringsphären gleich dicht und in aufeinanderfolgenden Ringsphären in gleicher Zahl vorhanden sein, bis von einer gewissen Sphäre ab der Abstand der Ätheratome so groß geworden ist, daß ihre Anzahl sprunghaft größer wird. Die Figur soll dies für einen speziellen Fall verdeutlichen. An den Sphären



der Radien r_1, r_2, r_3, wo die Ätheratome sprunghaft ihre Dichte ändern, befinden sich also „Sprünge" im Äther, hier erleidet der Ätherkristall eine Unstetigkeit; diese Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle ist dasselbe, was in § 1 und § 8 ein „Ätherva kuum" genannt war.

Fragen wir nun, welche Radien mögen die Ätherspr ungstellen, oder die „Ringe aus Äthervakuum", haben? Es werde mit r_0 der Radius des ersten, mit r_1 der Radius des zweiten Ringes bezeichnet; für die folgenden Ringe sind die entsprechenden Indizes zu nehmen. Die Höhe des ersten Ringes sei h_0, die des zweiten h_1 usw. Die Zahl der Ätheratome, die den ersten Ring auf seiner äußeren Oberfläche begrenzt, sei N_0, die des zweiten Ringes sei N_1 usw. Dann ist, falls die Ätheratome sich immer so ordnen, daß der Äther sehr nahezu[1]) die gleiche Dichte hat:

$$\frac{2\pi r_0 h_0}{N_0} = \frac{2\pi r_1 h_1}{N_1} = \frac{2\pi r_2 h_2}{N_2} = \ldots = \frac{2\pi r_p h_p}{N_p},$$

also:

$$r_p = \frac{N_p}{N_0}\cdot\frac{h_0}{h_p}\cdot r_0 .$$

Sobald nun die Größe[2]):

$$\frac{N_p}{N_0}\cdot\frac{h_0}{h_p} = p^2,$$

was z. B. der Fall ist, wenn $N_p = p \cdot N_0$ und $h_0 = p \cdot h_p$, so folgt:

$$r_p = p^2 \cdot r_0 .$$

Dies ist das in § 1 vorausgesetzte Abstandsgesetz der Ringe, das hier als Folge des kristallinischen Gefüges des Äthers erscheint. Die ganze Zahl p aber, also die ganzzahlige Ordnungszahl der Serienspektren, erscheint hier

1) Faradays Experimentaluntersuchungen. Dtsche. Übersetzung Bd. 2, S. 263.

1) Ganz genau wird dies nicht gelten, da der Äther nicht ganz inkompressibel sein wird. Daraus entspringen dann geringfügige Abweichungen der Serienformeln von ganzen Zahlen.

2) Die theoretische Begründung dieser Größe muß auf das Kristallsystem des Äthers führen.

bedingt durch den diskontinuierlichen Aufbau des Äthers[1].

Wenn wir dieses Bild weiter ausführen, so kommen wir zu äquatorialen und polaren Ringen, gerade so wie sie früher angenommen waren (vgl. § 11 und 12). — Es sei hier nur noch bemerkt, daß die Annahme eines Ätherkristalls, der statt ringförmiger Ätherspringstellen kugelschalenförmige Ätherspringstellen besitzt, bereits aus den in § 11 erwogenen Gründen auf Schwierigkeiten stößt und deshalb nicht in Betracht kommt.

§ 15. Von diesen Vorstellungen aus bedarf die Frage der Bewegung eines materiellen Körpers, also eines Atoms oder eines Atomhaufens, einer besonderen Erörterung. Man wird nicht annehmen wollen, daß ein im Äther bewegtes Atom den ganzen Schwarm von kristallinisch zu Ringen angeordneten Ätheratomen mit sich nimmt; abgesehen von den inneren Unwahrscheinlichkeiten einer solchen Annahme spricht auch die bekannte Erfahrungstatsache dagegen, daß in dem Versuch von Fizeau mit dem strömenden Wasser, das von Licht durchsetzt wird, keine Mitführung des Äthers mit dem strömenden Wasser erfolgt, und daß auch der sogenannte „Mitführungskoeffizient" nach Lorentz seine Erklärung dadurch findet, daß der Äther „vollständig ruht". Sonach scheint keine andere Annahme übrig zu bleiben, als die, daß bei der Bewegung eines Atoms im Äther nur das Zentrum des materiellen Atoms, nicht aber die es umgebenden Ringsysteme der Ätheratome an der fortschreitenden Bewegung teilnehmen, daß lediglich der Zustand des Äthers, also der Zwangszustand der das bewegte, materielle Atom umgebenden Ätheratome, mit der Geschwindigkeit des Atommittelpunktes fortschreitet. Ferner wird man nicht annehmen wollen, daß die Übertragung dieses Zwangszustandes des Äthers momentan erfolgt, vielmehr wird sie als Nahwirkung Zeit gebrauchen und sich mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die als die Lichtgeschwindigkeit zu erraten ist. Die durcheinanderwirbelnde Bewegung eines Haufens solcher Atome wird hiernach durcheinanderwirbelnde Zustandsänderungen des Äthers im Gefolge haben, und wir kommen so zur Annahme von Pulsationen der Ätheratome; wir treten so in den Gedankenkreis von Bjerknes[2]) und Korn[3]) ein, die zur Erklärung der Gravitation Pulsationszustände des Äthers vorausgesetzt haben. Weiter werden wir durch unsere obigen Vorstellungen veranlaßt zu folgern, daß die Gravitationswirkungen zweier gravitierender Körper von der Temperatur derselben abhängig sein sollten; denn es sollte z. B. bei Steigerung der Wirbelbewegung der Atommittelpunkte, also der Temperatur der Körper, auch eine Verstärkung der Schwingungen der Ätheratome eintreten, und entsprechend sollten die Gravitationswirkungen zunehmen. Eine experimentelle Bestätigung hierfür ist allerdings wohl noch nicht erbracht worden. Für eine andere Folgerung ist aber dafür die experimentelle Stütze vorhanden. Es sollte nach obigen Darlegungen das Ringsystem der Atome und damit die Gelegenheit für die Entstehung von Spektrallinien auch noch gegeben sein, wenn die Atome sich soweit einander nähern, daß die einzelnen Ringe gleich oder größer werden als der gegenseitige Abstand zweier Atommittelpunkte, nur sollte dann infolge des Ineinandergreifens der elektrostatischen Kraftfelder benachbarter Atome die Schärfe der Spektrallinien mit steigender Seriennummer abnehmen und es sollte in einem Gase wegen der Seltenheit von solchen Atomabständen, die größer sind als die mittlere Weglänge, das Auftreten der höheren Serienlinien seltener werden; mithin sollten die höheren Spektrallinien lichtschwächer sein als die Linien der geringeren Seriennummer. Diesen Folgerungen entspricht durchaus das Verhalten der Balmerschen Wasserstoffserie, wie auch die Versuche von Merton und Nicholson[1]) zeigen, und es besteht wohl keine Notwendigkeit, den Schluß dieser Forscher in betreff der Schwierigkeiten für die Erklärung ihrer Beobachtungen durch ein Atommodell anzunehmen.

Überblicken wir die gesamte, hier in § 1 bis § 15 erörterte, bunte Folge von Tatsachen, so können wir sagen, daß eine große Menge von Erscheinungen der Lichtemission, der elektrooptischen Erscheinungen, von Einzelheiten der Spektren und Spektralserien miteinander in Beziehung gesetzt werden konnte, und daß auch zu entlegeneren Gebieten, wie z. B. zur Gravitation, Brücken erkennbar werden und neue Gesichtspunkte und Fragen sich ergeben; für noch andere Gebiete, wie die Radioaktivität und den Magnetismus, läßt das Modell Möglichkeiten der Einordnung offen. Innere Widersprüche besitzt das Modell nicht; Widersprüche zu irgendwelchen, experimentell sichergestellten Tatsachen dürften, soweit die quantitativen

1) Der ganzzahlige Faktor, der in der Quantentheorie das Vielfache einer Energiemenge bezeichnet, erscheint hier als durch den atomistischen Aufbau des kristallinischen Äthers gegeben.

2) C. A. Bjerknes, z. B. Ostwalds Klassiker der exakten Wiss. Nr. 145.

3) A. Korn, z. B. Sitzungsber. d. Bayr. Akadem. d. Wiss. 1903. S. 393 u. 563ff.

1) Merton und Nicholson, Proc. Roy. Soc. A 96, 112, 1919.

Tatsachen durch das Modell nur näherungsweise wiederzugeben waren, durch bessere Anpassung der speziellen Voraussetzungen an die Erfordernisse der Wirklichkeit ausgleichbar sein. Die Grundannahme des Ganzen ist ein Äther von atomistischem Aufbau, dessen Gefüge mehr einem Kristall als einem Gas ähnelt. Von der Wahrheit dieser Grundannahme dürfte die Anwendbarkeit und sicherlich auch die weitere Fruchtbarkeit des gesamten Gebäudes abhängen, das aus einem Modell der Lichtemission zu einer Theorie der Materie und des Äthers wurde.

(Eingegangen 12. November 1919.)

Betrachtungen über den radioaktiven Zerfall des Atomkernes.

Von Hans Th. Wolff.

Wie aus einer Arbeit von F. A. Lindemann[1]) zu ersehen ist, gestatten Überlegungen, welche das exponentielle Gesetz des radioaktiven Atomzerfalles mit der Geiger-Nuttallschen Gleichung

$$\log \lambda = A + B \log R \qquad (1)$$

(λ = radioaktive Zerfallskonstante, R = Reichweite der α-Strahlen, A und B Konstante) in Verbindung bringen, Schlüsse auf die Vorgänge im Atomkern zu ziehen. Auch in der vorliegenden Notiz werden ähnliche Betrachtungen angestellt, doch finden sich hier wesentliche Verschiedenheiten gegenüber der Abhandlung von Lindemann.

Bekanntlich besteht zwischen der Reichweite R der α-Strahlen und ihrer Geschwindigkeit v die Beziehung

$$v = k \sqrt{R}.$$

Dies in (1) eingesetzt, ergibt

$$\log \lambda = A - 3B \log k + 3B \log v, \qquad (2)$$

also es ist

$$\lambda = v^{3B} \cdot \text{const.} \qquad (3)$$

Dieser einfache Zusammenhang zwischen der Zerfallskonstanten λ und der Geschwindigkeit v, mit welcher die α-Strahlpartikeln zur Beobachtung gelangen, ist am leichtesten zu verstehen, wenn letztere im Atomkern eine Umlaufsgeschwindigkeit besitzen, welche ebenfalls gleich v ist. Daß eine derartige Annahme denkbar ist, kann man aus einer früheren Veröffentlichung des Verfassers[2]) ersehen. Die Größe B beträgt für die U-Ra-Reihe 54, also ist λ proportional zu v^{162}. Es ist nun λdt gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Atom während der Zeit dt instabil wird. Daß eine so hohe Potenz von v für die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls maßgebend ist, kann man kaum anders erklären als dadurch, daß eine größere Zahl von Partikeln, deren Bewegungen voneinander unabhängig sind, zugleich gewisse Bedingungen erfüllen muß, wenn der Kern instabil werden soll. Bei der Berechnung jener Wahrscheinlichkeit sollen nicht die Geschwindigkeiten, sondern die Umlaufszahlen der auf kreisförmigen Bahnen befindlich gedachten Teilchen in Betracht gezogen werden. Wir nehmen an, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die $r$te Partikel die für das Zustandekommen des Zerfalls erforderliche Bedingung erfüllt, sei gleich $a'_r \nu_r$, wobei ν_r die Umlaufszahl pro Sekunde bedeute. Die Größe von a_r hängt von den Eigenschaften des Kerns ab, welche dessen Zerfall ermöglichen. Ist das Zusammenwirken von N voneinander unabhängigen Teilchen für das Zustandekommen des Zerfalls notwendig, so hat jene Wahrscheinlichkeit die Größe

$$\prod_1^N a'_r \nu_r.$$

Von 1 g zerfallen also

$$\prod_1^N (a'_r \nu_r)\, g.$$

Solcher Zerfallsmöglichkeiten mögen im Laufe einer Sekunde n eintreten[1]). Somit zerfallen während der Zeit dt

$$n\, dt \cdot \prod_1^N (a'_r \nu_r)\, g.$$

Benutzt man nun die Bezeichnung

$$a_r = a'_r \sqrt[N]{n},$$

so ist

$$\lambda = \prod_1^N a_r \nu_r. \qquad (4)$$

Es soll nun angenommen werden, daß der Bohrsche Ansatz über die Größe des Impulsmomentes auch im Kern gilt. Das $r$te Teilchen muß also die Bedingung erfüllen:

$$\mu_r v_r \varrho_r = \frac{h q_r}{2\pi}, \qquad (5)$$

wobei μ_r seine Masse, ϱ_r sein Bahnradius und q_r eine ganze Zahl, die Quantenzahl, bedeutet. Wenn mehrere Partikeln sich auf demselben Kreise bewegen, so liegt die Annahme nahe, daß q_r auch keine ganze Zahl sein kann. Für

1) F. A. Lindemann, Phil. Mag. **30**, 560, 1915, Beibl. **40**, 119, 1916.

2) H. Th. Wolff, Ann. d. Phys. **60**, 685, 1919.

1) Bei F. A. Lindemann würde n angeben, wie oft pro Sekunde eine gewisse Spannung den Kern durchquert. Der genannte Autor setzt $n = 1$.

den Fall, daß p Elektronen auf derselben Bahn umlaufen, setzt Sommerfeld[1]) vermutungsweise das Impulsmoment gleich

$$\frac{h}{2\pi}\sqrt{p},$$

und S. Ratnowsky[2]) begründet den Ansatz, daß dieses gleich

$$\frac{h}{2\pi}\sqrt{p!}$$

ist. Es ist denkbar, daß auch für die Teilchen des Kernes eine solche Beziehung statthat.

Auf Grund der Beziehung

$$v_r = 2\pi\varrho_r\nu_r$$

ist nach (5)

$$\nu_r = \frac{h\,q_r}{4\pi^2\mu_r\varrho_r^2} \qquad (6)$$

und

$$v_r^2 = \frac{h\,q_r\nu_r}{\mu_r}. \qquad (7)$$

Gleichung (2) nimmt jetzt die Form an:

$$\log\lambda = A - 3B\log k + \tfrac{3}{2}B\log\frac{h\,q_1}{\mu_1} + \tfrac{3}{2}B\log\nu_1, \qquad (8)$$

wobei sich der Index $r = 1$ auf diejenige Partikel, welche als α-Strahl zur Aussendung gelangt, bezieht. Aus (6) folgt

$$\frac{\nu_r}{\nu_1} = \frac{q_r\mu_1\varrho_1^2}{\mu_r\varrho_r^2 q_1},$$

so daß man an Stelle von Gleichung (4) schreiben kann:

$$\lambda = \nu_1^N \prod_1^N \frac{a_r q_r \varrho_1^2 \mu_1}{q_1 \varrho_r^2 \mu_r} = a_1 \nu_1^N \prod_2^N \frac{a_r q_r \varrho_1^2 \mu_1}{q_1 \varrho_r^2 \mu_r}. \qquad (9)$$

Diese Gleichung stimmt mit (8) überein, vorausgesetzt, daß die beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$N = \tfrac{3}{2}B, \qquad (10)$$

$$a_1 \prod_2^N \frac{a_r q_r \varrho_1^2 \mu_1}{q_1 \varrho_r^2 \mu_r} = b\left(\frac{h\,q_1}{\mu_1 k^2}\right)^N, \qquad (11)$$

wobei die Bezeichnung gebraucht ist

$$b = 10^4. \qquad (12)$$

Wenn N, die Zahl der Teilchen, von denen das Instabilwerden des Kerns abhängt, unverändert bleiben soll, so hat man sich vorzustellen, daß nach jeder Aussendung eines α-Strahles eine Partikel in Wirksamkeit tritt, die zuvor nicht in Rücksicht zu ziehen war. Eine andere naheliegende Anschauung wäre die, daß während der einzelnen Stufen des Atomzerfalls kein neues Teilchen für den Stabilitätszustand des Kerns wesentlich wird. N müßte dann bei jeder α-Strahlumwandlung um 1 abnehmen, wofern zu den N Partikeln immer das ausgesandte Teilchen gehört. Wir wollen feststellen, ob die experimentellen Ergebnisse eine Entscheidung dieser Frage ermöglichen. Zu diesem Zwecke berechnen wir aus (1) die Werte von B, welche sich aus den Beträgen von λ und R ergeben, die je 2 aufeinanderfolgenden α-Strahlern einer Reihe zugehören. Auf diese Weise eliminieren wir A, so daß die gefundenen Werte von B nicht von der Größe von A abhängen. In Tabelle I sind die gefundenen Ergebnisse zusammengestellt[1]). Die Werte von λ und R wurden dem Lehrbuch der Radioaktivität von St. Meyer und E. R. v. Schweidler (Berlin 1916) entnommen. Die für die *U-Ra*-Reihe sich ergebenden Werte von B zeigen zwar gewisse Unregelmäßigkeiten, sprechen aber entschieden mehr für die Konstanz von B als für dessen Abnahme bei fortschreitendem Zerfall. Die Werte für die beiden anderen Zerfallsreihen sind noch unregelmäßiger. Auf eine Abnahme von B weisen auch sie nicht hin. Wir nehmen daher Unveränderlichkeit von N an[2]).

Tabelle I.

U-Ra-Reihe	B	*Th*-Reihe	B	*Ac*-Reihe	B	B^3)
U I	ca. 53	*Th*	64	*Ra Ac*	ca. 53	ca. 53
U II	„ 51	*Ra Th*	50	*Ac X*	40	49
Io	58	*Th X*	58	*Ac Em*	64	57
Ra	53	*Th Em*	47	*Ac A*	56	56
Ra Em	58	*Th A*	72			
Ra A	54					
Ra C'	53					
Mittel	54		58		55	54
$\overline{N} =$	81	$\overline{N} =$	87	$\overline{N} =$	83	81

Unter Benutzung von Gleichung (5) kann man bei Zugrundelegung einer bestimmten Quantenzahl den Radius ϱ_1 der Bahn derjenigen Partikel berechnen, welche als α-Strahl von der Geschwindigkeit v_1 (gleichzeitig Geschwindigkeit im Kern) zur Ausstrahlung gelangt. Die für die Quantenzahl 1 sich ergebenden Werte von

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **53**, 497, 1917. Siehe speziell S. 546 ff.

2) S. Ratnowsky, Ann. d. Phys. **56**, 529, 1918. Siehe speziell § 16.

1) Der hier einem Zerfallsprodukt zugeschriebene Wert von B ist aus den Konstanten dieses und des folgenden α-Strahlers berechnet worden.

2) St. Meyer, Wien. Ber. (IIa) **125**, 201, 1916 bestimmt für die 3 Zerfallsreihen die Werte 81, 77 und ca. 71 für N.

3) Bei Benutzung der Halbwertszeit 3,92 sec für *Ac Em*. Nach R. Schmid, Wien. Ber. (IIa) **126**, 1065, 1917; Mitt. a. d. Inst. f. Radiumforsch. Nr. 103. — Verwendet man die von St. Meyer u. Fr. Paneth, Wiener Ber. (IIa) **127**, 147, 1918; Mitteil. a. d. Inst. f. Radiumforsch. Nr. 104 angegebenen Halbwertszeiten (für *Rd Ac* 18,9 Tage, *Ac X* 11,2 Tage, *Ac C* 2,16 Min.), so erhält man bei gleichzeitiger Benutzung der Halbwertszeit 3,92 sec für *Ac Em* die folgenden Werte von B für die *Ac*-Reihe: ca. 58, 46, 57 und 52, im Mittel gleich 53.

ϱ_1 sind in Tab. II zusammengestellt. Die Werte von v_1 wurden wiederum dem genannten Lehrbuch entnommen. Es liegt die Annahme nahe,

Tabelle II.

U-Ra-Reihe	$\varrho_1 \cdot 10^{13}$ / $\varrho_1 = 1$	*Th*-Reihe	$\varrho_1 \cdot 10^{13}$ / $\varrho_1 = 1$	*Ac*-Reihe	$\varrho_1 \cdot 10^{13}$ / $\varrho_1 = 1$
U I	1,15	*Th*	1,13	*Ac*	1,03
U II	1,10	*Rd Th*	1,00	*Rd Ac*	0,940
Io	1,08	*Th X*	0,963		0,969
Ra	1,05	*Th Em*	0,919	*Ac X*	0,965
Ra Em	0,975	*Th A*	0,878	*Ac Em*	0,883
Ra A	0,935	*Th C*	0,924	*Ac A*	0,849
Ra C	0,823	*Th C'*	0,767	*Ac C*	0,908
Ra F	1,000				

daß die Beträge von ϱ_1 von der Größenordnung der Kernradien sind. Da letztere nach Rutherford 10^{-12} cm nicht überschreiten dürften, so erscheinen die vorliegenden Werte von ϱ_1 nicht undenkbar. Man hat vielleicht Quantenzahlen, die größer als 1 sind, einzuführen. Es fällt auf, daß bei *RaF*, *ThC* und *AcC* eine Zunahme von ϱ_1 stattfindet. Es ist möglich, daß hier kleinere Werte der Quantenzahl eintreten, so daß ϱ_1 nunmehr auch jetzt abnimmt. Vielleicht besteht ein Zusammenhang mit den bei *RaC*, *ThC* und *AcC* stattfindenden Verzweigungen der Zerfallsreihen.

Es soll nun die Formel (11) näher betrachtet werden. Die rechte Seite dieser Gleichung dürfte für eine Zerfallsreihe konstant sein, abgesehen vielleicht von den soeben erwähnten Körpern *RaF*, *ThC* und *AcC*. Der auf der linken Seite auftretende Quotient $\frac{q_r}{q_1}$ ist wohl auch im allgemeinen konstant. Eine für unsere Betrachtungen vermutlich bei den meisten Zerfallsprodukten nur geringfügige Änderung könnte $\prod \frac{q_r}{q_1}$ dadurch erleiden, daß bei jeder α-Strahlung eine Partikel in Wegfall kommt und, wie oben angenommen, eine neue in Wirksamkeit tritt. Hierdurch könnte auch $\prod \frac{\mu_1}{\mu_r}$ sich etwas ändern[1]). Mit gewissen Einschränkungen können wir also die Bedingungsgleichung aufstellen

$$a_1 \prod_2^N \frac{a_r \varrho_1^2}{\varrho_r^2} = \text{const} \qquad (13)$$

und statt (9) schreiben

$$\lambda = v_1^N \cdot \text{const.} \qquad (14)$$

Wir wollen nun den Fall betrachten, daß bei Aussendung eines α-Strahles die Bewegung der übrigen Partikeln und das in (13) auftretende Produkt der Größen a_r keine Änderung erleidet. Die Atomumwandlung kommt unter Mitwirkung von N-Teilchen mit den Bahnradien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_N$ zustande. Das Eintreten der nächsten α-Strahlung hängt von N Partikeln ab, deren Bahnradien nunmehr $\varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{N+1}$ sind. Bei der Aufstellung der Bedingung (13) ist das Produkt auszurechnen:

$$\prod_3^{N+1} \frac{\varrho_2}{\varrho_r} = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{N-1} \cdot \prod_3^{N+1} \frac{\varrho_1}{\varrho_r}$$

$$= \frac{\varrho_1}{\varrho_{N+1}} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^N \cdot \prod_2^N \frac{\varrho_1}{\varrho_r}.$$

Damit Gleichung (13) erfüllt ist, muß sein:

$$\varrho_{N+1} = \varrho_1 \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^N. \qquad (15)$$

Diese Beziehung muß auch dann gelten, wenn die einzelnen Radien ϱ_r zwar bei einer α-Strahlumwandlung nicht unverändert bleiben, aber ihre gegenseitigen Verhältnisse beibehalten werden, denn Formel (13) enthält nur die Quotienten der Radien.

Bei der dargestellten Anschauung ändert sich die Zerfallskonstante nach (14) in der Nten Potenz der Umlaufszahl v_1, obwohl bei der Aussendung eines α-Strahles keine sonstige Änderung im Kern eintritt und nicht etwa N-Partikeln eine andere Umlaufszahl annehmen[1]). Das Auftreten der Nten Potenz liegt daran, daß an Stelle des ausgestrahlten Teilchens ein neues (Index $N+1$) in Wirksamkeit tritt, von welchem die Stabilität des Kernes abhängt. Gleichung (15) macht in Zusammenhang mit (4) und (6) das Vorhandensein des Exponenten N verständlich.

Schließlich sei noch auf eine andere Anschauungsweise hingewiesen. Gleichung (15) legt die Vorstellung nahe, daß für $r = 0, 1, 2$ usw. die Beziehung

$$\varrho_{r+1} = \varrho_1 \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^r$$

gilt, also die Bahnradien von je 2 bei unserer Numerierung aufeinanderfolgenden Partikeln in demselben Verhältnis zueinander stehen. Der Atomkern wäre etwa scheibenförmig auf-

1) Denkt man sich den Kern aus *He*- und *H*-Atomen aufgebaut, so bedeutet μ_r die Masse des Atoms eines dieser Elemente. — Die letzten Betrachtungen erfahren eine Änderung, wenn die α-Strahlen von einem Kreis ausgehen, der mehrere Teilchen enthält und hierbei für das Impulsmoment ein Ansatz von der auf S. 176 erwähnten besondern Art gültig ist.

1) F. A. Lindemann bezeichnet es (l. c. S. 563) als Hauptschwierigkeit seiner Hypothese, daß sich die Energie der wirksamen Partikeln von Zerfallsstufe zu Zerfallsstufe ändert.

gebaut zu denken. Das jeweils zu äußerst umlaufende Teilchen würde als α-Strahl ausgesandt. Nimmt man an, daß im Laufe des Zerfalls die Bahnradien unverändert bleiben, so gibt Tabelle II die Werte von ϱ_1, ϱ_2 usw. für U I, Th und Ac an. Diese Größen ϱ_r erfüllen nicht die zuletzt angeführte Gleichung. Daher hätte man wohl vorauszusetzen, daß die Bahnradien jetzt nicht unverändert bleiben, wofern man den aufgeführten Zahlen eine hinreichende Genauigkeit zuschreiben kann.

Zusammenfassung.

Entsprechend wie in einer Arbeit von F. A. Lindemann[1]) wird angenommen, daß das Instabilwerden des Atomkerns von einer größeren Anzahl Teilchen abhängt, welche sich in ihm voneinander unabhängig bewegen. Es wird vorausgesetzt, daß diese Partikeln bei ihrem kreisförmigen Umlauf das Bohrsche Gesetz betreffend die Größe des Impulsmomentes befolgen und daß ein α-Strahlenteilchen die beobachtbare Geschwindigkeit auch im Kern besitzt.

Aus der Geiger-Nuttallschen Beziehung zwischen der Zerfallskonstante und Reichweite der α-Strahlen und der bekannten Relation zwischen deren Geschwindigkeit und Reichweite läßt sich eine Formel ableiten, welche die Zerfallskonstante als Funktion der Umlaufszahl des Teilchens ausdrückt, das als α-Strahl zur Aussendung gelangt. Eine entsprechende Formel ergibt sich auf rein theoretischem Wege. Es wird eine Bedingungsgleichung aufgestellt, welche erfüllt sein muß, damit beide Formeln identisch werden. Sie wird auf den Fall angewandt, daß die Bewegung der betrachteten Partikeln im Kern während der einzelnen Stufen des Atomzerfalls keine Änderung erleidet. Zum Schluß wird auf die Möglichkeit hingewiesen, daß je zwei ihrer Größe nach aufeinanderfolgende Bahnradien der genannten Teilchen in demselben Verhältnis zueinander stehen.

1) F. A. Lindemann, l. c.

Dresden, im Oktober 1919.

(Eingegangen 23. Oktober 1919.)

Die van der Waalsschen Kohäsionskräfte.

Von P. Debye.

Der große Erfolg der van der Waalsschen Zustandsgleichung beruht bekanntlich wesentlich auf der Einführung von anziehenden Kräften zwischen den Molekülen. Sie bedingen den zum äußeren zusätzlichen inneren, dem Quadrate der Dichte proportionalen Druck. Diese anziehenden Kräfte sind nach van der Waals zwischen Molekülen beliebiger Art vorhanden, sie sind eine allgemeine Eigenschaft der Materie und es scheint mir daher von besonderem Interesse, über die Ursache dieser universellen Anziehung nachzudenken.

Heutzutage wissen wir mit vollständiger Sicherheit, daß das Molekül ein System elektrischer Ladungen ist. Man wird daher versuchen, einen elektrischen Ursprung für die van der Waalsschen Kräfte zu finden. Dabei wird es sicher unnötig sein, auf Besonderheiten des Molekülbaues einzugehen: Eine so allgemeine Eigenschaft der Materie, wie die van der Waalssche Anziehung kann zu ihrer Begründung nur die Kenntnis ganz äußerlicher und für alle Moleküle gleichartiger Eigenschaften ihres Aufbaues benötigen.

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß es tatsächlich zum Verständnis genügt, wenn man weiß, daß die Moleküle elektrische Systeme sind, in denen überdies die Ladungen nicht vollständig starr an Ruhelagen gebunden sind. So wird ein Zusammenhang entstehen zwischen der van der Waalsschen Anziehungskonstante einerseits, Brechungsexponent und Verbreiterung von Spektrallinien andererseits.

§ 1. Die van der Waalssche Gleichung.

Wir fangen damit an, daß wir für das Folgende einige bekannte Beziehungen zusammenstellen.

Hat man ein Gas vom wirklichen Volumen V und vom Druck p bei der absoluten Temperatur T; ist dessen Masse G, das Molekulargewicht M und bedeutet R die universelle Gaskonstante ($R = 8{,}31 \cdot 10^7$ erg) dann gilt nach van der Waals die Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{A}{V^2}\right)(V - B) = G\,\frac{R}{M}\,T. \qquad (1)$$

Darin bedeutet B das Vierfache des wirklichen Volumens der in V enthaltenen Moleküle, während A die gegenseitige Anziehung der Moleküle mißt.

In bekannter Weise schließt man aus dieser Gleichung für den kritischen Punkt die Beziehungen

$$p_k = \frac{1}{27}\,\frac{A}{B^2},\quad V_k = 3B,\quad \frac{G\,R}{M}\,T_k = \frac{8}{27}\,\frac{A}{B}. \qquad (2)$$

Die Gesamtenergie des Gases ist teils kinetisch und teils potentiell. Über die Abhängigkeit derselben vom Volumen gibt am einfachsten die thermodynamische Beziehung

$$\frac{\partial U}{\partial V} = T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p}{T}\right) \qquad (3)$$

Aufschluß. Einsetzen der Zustandsgleichung in das rechte Glied jener Beziehung liefert nämlich

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{A}{V^2} \qquad (4)$$

oder integriert

$$U = \Psi(T) - \frac{A}{V}. \qquad (4')$$

Um die van der Waalssche Konstante A zu berechnen, wird es also nur nötig sein, die potentielle Energie des Gases, in der Formel durch $-\frac{A}{V}$ gemessen, zu bestimmen.

Neben der eben angegebenen auf eine beliebige Menge G des Gases bezogenen Form der Gleichungen werden wir noch eine auf das Mol bezogene benutzen. Nennt man

$$\mathfrak{v} = \frac{MV}{G}$$

das Molekularvolum und führt statt A und B die Konstanten a und b ein durch die Beziehungen

$$a = \frac{M^2}{G^2} A, \; b = \frac{M}{G} B, \qquad (5)$$

so lautet die van der Waalssche Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{\mathfrak{v}^2}\right)(\mathfrak{v} - b) = RT, \qquad (6)$$

während sich für die kritischen Größen ergibt

$$p_k = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}, \; \mathfrak{v}_k = 3b, \; RT_k = \frac{8}{27}\frac{a}{b}. \qquad (7)$$

Schließlich ergibt sich für die pro Mol gerechnete Energie $\mathfrak{u} = MU/G$ der Wert:

$$\mathfrak{u} = \psi(T) - \frac{a}{\mathfrak{v}}. \qquad (8)$$

§ 2. Die Ursache der Kohäsion.

Denkt man sich die Moleküle zunächst als starre elektrische Systeme, so wird natürlich zwischen zwei solchen Gebilden stets eine Kraft vorhanden sein, welche aber je nach der gegenseitigen Orientierung nach Größe und Vorzeichen wechseln kann. Nun kommen im Gase alle möglichen Orientierungen vor, so daß man zur Berechnung der für die Zustandsgleichung in Frage kommenden Anziehungen eine Mittelung über jene Orientierungen wird vornehmen müssen.

Im allgemeinen hätte man bei der Ausführung dieses Verfahrens die Wahrscheinlichkeit einer beliebigen Orientierung zu bestimmen auf Grund des Boltzmann-Maxwellschen Prinzips. Je höher aber die Temperatur ist, um so weniger tritt in diesem Gesetz die Abhängigkeit von der gegenseitigen Energie in den Vordergrund. In der Grenze für hohe Temperaturen wird man demnach alle Orientierungen im Raum als gleichberechtigt anzusehen haben. Offenbar verlangt der van der Waalssche Ansatz, daß gerade in diesem Grenzfalle die charakteristische in die Gleichung eingeführte Kohäsion übrig bleibt.

Nun kann man sich aber leicht überzeugen, daß zwei starre elektrische Systeme im Mittel gar keine Kraft aufeinander ausüben. Tatsächlich kann das Potential, welches in einem entfernten Punkt von einem Molekül herrührt, im Mittel angesehen werden als hervorgebracht von einer Reihe zentrierter Kugeln, welche mit konstanter elektrischer Oberflächendichte belegt sind. Hat nämlich das Molekül alle möglichen Orientierungen im Raum, so kommt jede Ladung bei der Mittelung in jeden Punkt einer Kugel gleich oft. Da man nun weiß, daß eine mit konstanter Oberflächendichte geladene Kugel nach außen so wirkt als ob die Gesamtladung in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre und das Molekül im ganzen ungeladen ist, so ist das Potential im Aufpunkt im Mittel Null. Es besteht also auch im Mittel zwischen zwei starr gedachten Molekülen keine Kraftwirkung.

Die ganze Sachlage wird aber sofort wesentlich anders, wenn man bedenkt, daß die Moleküle nicht vollkommen starr sind. Der Umstand, daß jedes Gas einen von 1 verschiedenen Brechungsexponenten zeigt, bedeutet ja nichts anderes, als eine Beweglichkeit der Einzelladungen im Molekül. Berücksichtigt man nun diesen Umstand, so erhellt, daß ein Molekül im elektrischen Felde $\mathfrak{E}$ eines anderen ein elektrisches Moment bekommt, welches proportional mit $\mathfrak{E}$ ist. Dadurch entsteht zwischen den beiden Molekülen eine gegenseitige Energie, welche proportional Feldstärke mal Moment, d. h. proportional dem Quadrate von $\mathfrak{E}$ ist. Die entsprechende Kraftwirkung kann also im Mittel nicht verschwinden. Überdies überzeugt man sich leicht, daß die Kraft stets eine anziehende ist, so daß man schon hier vermuten kann in ihr die gesuchte universelle van der Waalssche Anziehung gefunden zu haben[1]).

1) Der Tatbestand möge an Hand des folgenden Beispiels beleuchtet werden. Zwei Dipole stehen einander gegenüber:

a) in einer Stellung I. Dann ist die Hauptwirkung eine abstoßende. Infolge der Wirkungen der Feldstärken $\mathfrak{E}$ auf die nicht starr verbundenen Ladungen werden dieselben so verschoben, daß die elektrischen Momente verkleinert werden. Dadurch nimmt die abstoßende Kraft ab, oder anders ausgedrückt: zu der Hauptwirkung ist noch als Nebenwirkung eine anziehende Kraft hinzugetreten;

b) in einer Stellung II. Dann ist die Hauptwirkung eine anziehende. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ aber verschiebt jetzt

Nachdem dieses erkannt, handelt es sich nur darum, die potentielle Energie des Gases zu berechnen. Dazu genügt es offenbar, wenn man weiß, wieviel Arbeit man zu leisten hat, um ein Molekül aus dem Inneren des Gases durch dessen Oberfläche hindurch an einen genügend weit entfernten Punkt zu bringen. Die Berechnung dieser Arbeit geschieht am besten in zwei Schritten.

Zunächst beantworte man die Frage: Wie groß ist die Arbeit, welche zu leisten ist, um ein polarisierbares Molekül, dessen elektrisches Moment

$$\mathfrak{m} = \alpha \mathfrak{E} \tag{9}$$

gesetzt werden kann, aus einem feldfreien Punkt an eine Stelle zu bringen, wo die Feldstärke $\mathfrak{E}$ herrscht?

Eine einfache Überlegung liefert für diesen Arbeitsbetrag den Wert

$$-\frac{\alpha}{2}\mathfrak{E}^2 \tag{10}$$

unabhängig vom Wege, auf dem das Molekül bewegt wurde[1]).

Dann beantworte man die Frage: Wie groß ist das mittlere Quadrat der elektrischen Feldstärke in einem Punkte im Innern des Gases? Durch Kombination der beiden Antworten findet sich dann leicht die gesuchte Arbeitsleistung.

§ 3. Der quadratische Mittelwert der elektrischen Feldstärke.

Besteht ein Molekül aus elektrischen Ladungen e_k, welche an Stellen mit den Koordinaten ξ_k, η_k, ζ_k liegen, begibt man sich in einen im Abstande r vom Nullpunkt liegenden Aufpunkt mit den Koordinaten x, y, z und entwickelt das Potential nach negativen Potenzen von r, so erhält man in bekannter Weise:

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{\Sigma e_k}{r} + \frac{1}{r^2}\Big[\frac{x}{r}\Sigma e_k\xi_k + \frac{y}{r}\Sigma e_k\xi_k + \\ + \frac{z}{r}\Sigma e_k\zeta_k\Big] + \frac{1}{r^3}\Big[\frac{1}{2}\Big(3\frac{x^2}{r^2}-1\Big)\Sigma e_k\xi_k^2 + \\ + \frac{1}{2}\Big(3\frac{y^2}{r^2}-1\Big)\Sigma e_k\eta_k^2 + \frac{1}{2}\Big(3\frac{z^2}{r^2}-1\Big)\Sigma e_k\zeta_k^2 + \\ + \frac{3xy}{r^2}\Sigma e_k\xi_k\eta_k + \frac{3yz}{r^2}\Sigma e_k\eta_k\zeta_k + \\ + \frac{3zx}{r^2}\Sigma e_k\zeta_k\xi_k\Big] + \cdots\end{aligned} \tag{11}$$

Das Molekül ist ungeladen, also verschwindet das erste Glied.

Es kann nun vorkommen, daß der Schwerpunkt der positiven Ladungen nicht mit dem Schwerpunkt der negativen Ladungen übereinstimmt. Dann hat das zweite Glied einen endlichen Betrag; man sagt, das Molekül trägt einen elektrischen Dipol. Ob ein Molekül dieser Kategorie angehört, entscheidet man z. B. mit Hilfe von Dielektrizitätskonstante δ und Brechungsexponente n. Das Molekül hat einen Dipol, wenn das Maxwellsche Gesetz $\delta = n^2$ nicht erfüllt ist. Oder man stellt fest, daß eine anormale Temperaturabhängigkeit von δ besteht, insofern trotz konstant gehaltener Dichte δ mit zunehmender Temperatur abnimmt[1]). Oder auch das Molekül hat einen Dipol, wenn anormale elektrische Dispersion im Drudeschen Sinne vorhanden ist[2]).

Gase von dieser Art zeigen bei genügender Größe des elektrischen Momentes ausgeprägte Assoziationserscheinungen[3]) und damit zugleich

die Ladungen so, daß die Momente zunehmen. Dadurch wird nunmehr die Hauptwirkung verstärkt oder in anderer Ausdrucksweise: es ist wieder eine anziehende Kraft als Nebenwirkung hinzugetreten. Bei der Mittelung über alle möglichen Orientierungen verschwindet die Hauptwirkung; die Nebenwirkung dagegen ist stets anziehend und bleibt demnach auch bei der Mittelung als solche erhalten.

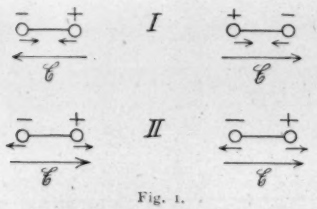


Fig. 1.

Man kann übrigens auch bemerken, daß im Sinne unserer Auffassung die van der Waalssche Kraft denselben Ursprung hat wie die Kraftwirkungen, welche beim Grundversuch der Elektrostatik in Erscheinung treten. Dabei zieht ein geladener Körper andere Körper an unabhängig davon, ob sie Leiter oder Isolatoren sind, d. h. es treten Kräfte auf, welche die beweglichen Teilchen von Stellen kleinerer zu Stellen größerer Kraftliniendichte treiben. In gleicher Weise erfahren die Moleküle Kräfte, welche bestrebt sind, die Teilchen einander zu nähern und damit in möglichst starke Felder hineinzubringen.

1) Das entsprechende Resultat für ein magnetisches Feld findet z. B. Anwendung bei der Bestimmung der Suszeptibilität schwach magnetisierbarer Körper mittels der Kraftwirkung, welche dieselben in einem inhomogenen Felde erfahren (Curie).

1) P. Debye, diese Zeitschr. **13**, 97, 1912; M. Jona, diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.

2) P. Debye, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **15**, 777, 1913.

3) Für Fragen, welche mit der Zustandsgleichung in Zusammenhang stehen, unterscheidet man die Stoffe in normale und anormale (J. P. Kuenen, Zustandsgleichung und Kontinuitätstheorie, Braunschweig 1907, S. 139). Ich bin der Meinung, daß diese Unterscheidung nichts anderes

verhältnismäßig starke Abweichungen von der einfachen van der Waalsschen Gleichung. Wir werden deshalb an dieser Stelle solche Gase von der Betrachtung ausschließen; ihr Verhalten wird demnächst näher beleuchtet werden.

Für unsere Zwecke wird nunmehr das Potential durch das dritte Glied dargestellt. Die Moleküle verhalten sich dann wie elektrische Quadrupole. Nun kann man bekanntlich das Koordinatensystem in das Molekül so hineinlegen, daß

$$\Sigma e_k \xi_k \eta_k = \Sigma e_k \eta_k \zeta_k = \Sigma e_k \zeta_k \xi_k = 0,$$

so daß das ganze Molekül charakterisiert werden kann durch die drei elektrischen Hauptträgheitsmomente

$$\Theta_1 = \Sigma e_k \xi_k^2, \quad \Theta_2 = \Sigma e_k \eta_k^2, \quad \Theta_3 = \Sigma e_k \zeta_k^2. \quad (12)$$

Ist $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$, dann verschwindet auch dieses dritte Glied und man müßte das nächste Glied der Reihenentwicklung benutzen. Es ist wahrscheinlich, daß diese Bedingung bei den meisten Gasen nicht erfüllt ist und wir werden deshalb mit dem Potentialausdruck für Quadrupole rechnen.

Man bilde jetzt aus dem angegebenen Ausdruck für das Potential die elektrische Feldstärke in einen um r entfernten Punkt nach der Beziehung

$$\mathfrak{E} = -\,grad\,\varphi,$$

berechne das Quadrat derselben und mittele über alle möglichen Orientierungen des Moleküls. Als Resultat dieser ganz elementaren Rechnung bekommt man dann für den gesuchten quadratischen Mittelwert eine Größe, welche nur abhängt von einer Kombination der drei Hauptträgheitsmomente, die mit τ^2 bezeichnet werden möge und den Wert hat

$$\tau^2 = \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 - (\Theta_1\Theta_2 + \Theta_2\Theta_3 + \Theta_3\Theta_1). \quad (13)$$

Der Mittelwert selbst ist mit dieser Abkürzung gleich

$$\frac{3\tau^2}{r^8}. \quad (14)$$

Sind nun pro Kubikzentimeter n Moleküle vorhanden, dann bekommt man den in einem Punkt des Gases herrschenden quadratischen Mittelwert der elektrischen Feldstärke, indem man den Wert

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \int_{r=d}^{\infty} n\,4\pi r^2\,dr\,\frac{3\tau^2}{r^8} = \frac{12\pi}{5}\frac{n\tau^2}{d^5} \quad (15)$$

bestimmt. Dabei ist die Integration erstreckt worden von einer unteren Grenze d an. Die Größe d steht für den Durchmesser eines Moleküls und ist gleich dem kleinsten Abstande, bis auf welchen sich zwei Molekülmittelpunkte nähern können[1]).

§ 4. Berechnung der van der Waalsschen Kohäsionskonstante.

Die Kombination von (10) und (15) würde für die potentielle Energie eines Moleküls im Gasinnern den Wert

$$-\frac{a}{2}\overline{\mathfrak{E}^2} = -\frac{6\pi}{5}\frac{n a \tau^2}{d^5} \quad (16)$$

liefern, wenn das elektrische Feld allein von den ursprünglich vorhandenen Molekülen herrühren würde und das hereingebrachte Molekül lediglich als polarisierbar und nicht als felderzeugend anzusehen wäre. Tatsächlich aber ist es von einem elektrischen Felde umgeben und polarisiert infolgedessen die gesamten schon vorhandenen Teilchen. Man sieht ohne weiteres, daß dementsprechend die bei dem Hereinbringen eines Moleküls in das Gas geleistete Arbeit doppelt so groß ist, als in (16) angegeben.

Sind nun schon Z-Moleküle in V enthalten, so daß $n = Z/V$ und fügt man dZ-Moleküle hinzu, so leistet man die Arbeit

$$-\frac{12\pi}{5}\frac{a\tau^2 Z\,dZ}{d^5\;V};$$

die gesamte potentielle Energie eines Gases mit N-Molekülen im Volumen V beträgt demnach

$$-\frac{6\pi}{5}\frac{a\tau^2 N^2}{d^5\;V}.$$

Andererseits fanden wir im § 1 für diese Energie den Wert $-\frac{A}{V}$, so daß wir erhalten

$$A = \frac{6\pi}{5}\frac{a\tau^2}{d^5}N^2. \quad (17)$$

Die Gesamtenergie wird also richtig umgekehrt proportional dem Volumen. Gehen wir noch von

bedeutet, wie eine Einteilung der Moleküle in solche, die keine und solche, die wohl Dipole tragen. Der Unterschied der beiden Gruppen ist indessen kein absolut scharfer. Bei Molekülen mit relativ kleinen Momenten (CO, CO_2) hängt es von dem betrachteten Temperaturbereich ab, ob man die Substanz zur ersten oder zweiten Gruppe zählen will.

1) Zur Bestimmung von $\overline{\mathfrak{E}^2}$ kann man nicht die von J. Holtsmark, diese Zeitschr. **20**, 162, 1919, entwickelte Wahrscheinlichkeitsformel benutzen. An jener Stelle wurde nämlich der Durchmesser der Moleküle zu 0 angenommen und dem entspricht es, daß aus den Holtsmarkschen Formeln $\overline{\mathfrak{E}^2} = \infty$ folgt. Es möge in diesem Zusammenhange bemerkt werden, daß auch bei dem von Holtsmark behandelten Problem eine Berücksichtigung der Endlichkeit der Durchmesser erwünscht wäre, um so mehr, als dadurch die Druckabhängigkeit des Verbreiterungseffekts beeinflußt werden dürfte.

Tabelle I.

	T_k	p_k (atm.)	a dyne cm^4	b cm^3	d cm	P_0 cm^{-3}	τ gr $^1/_2$ cm $^7/_2$ sec^{-1}
He . . .	5	2,75	$0{,}026 \cdot 10^{12}$	18,6	$2{,}44 \cdot 10^{-8}$	0,52	$2{,}84 \cdot 10^{-26}$
A	151	48,0	1,37 „	32,2	2,93 „	4,17	11,2 „
K . . .	210	54,3	2,34 „	39,6	3,14 „	6,25	14,5 „
X . . .	288	57,2	4,17 „	51,6	3,42 „	10,2	18,9 „
H_2*) . .	32	19,4	0,15 „	16,6	2,36 „	2,03	3,20 „
N_2 . . .	128	33,6	1,40 „	39,0	3,12 „	4,35	13,3 „
O_2 . . .	154	50,8	1,34 „	31,0	2,90 „	3,98	11,2 „
Cl_2 . . .	419	93,5	5,39 „	45,8	3,30 „	11,6	18,3 „
CH_4 . .	191	54,9	1,91 „	35,6	3,04 „	6,36	11,9 „
C_2H_6 . .	305	48,9	5,47 „	63,9	3,68 „	11,3	25,0 „
C_3H_{12} .	470	33,0	19,2 „	145	4,85 „	25,7	60,7 „
C_2H_4 . .	283	51,1	4,50 „	56,7	3,54 „	9,42	22,1 „

*) Aus dem bekannten Wasserstoffmodell würde sich ergeben $\tau = 2{,}07 \cdot 10^{-26}$.

der auf ein beliebiges Volumen V bezogenen Konstante A über auf die auf das Molvolumen v bezogene Konstante a, so ergibt sich

$$a = \frac{6\pi}{5} N^2 \frac{\alpha\tau^2}{d^5}, \tag{18}$$

wenn N ($N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$) die Loschmidtsche Zahl bedeutet. Die Konstante α ist ohne weiteres auf experimentell bestimmte Größen zurückzuführen. Bekanntlich ist es üblich, die Molekularrefraktion P einer Substanz vom Molekulargewicht M und der Dichte ϱ aus ihren Brechungsexponenten n zu bestimmen mittels der Gleichung

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{M}{\varrho} = P. \tag{19}$$

Der Grenzwert, den diese Größe für die Schwingungszahl o erhält, ist nach der Theorie der Dispersion nichts anderes wie unsere gesuchte Größe α, multipliziert mit $\frac{4\pi}{3} N$, so daß wir haben[1])

$$P_0 = \frac{4\pi}{3} N \cdot \alpha. \tag{20}$$

Infolgedessen kann die Formel für a auch geschrieben werden

$$a = \frac{9}{10} P_0 \frac{N \cdot \tau^2}{d^5}. \tag{21}$$

Die Kombination τ unserer elektrischen Hauptträgheitsmomente, welche wir also „mittleres elektrisches Trägheitsmoment" bezeichnen wollen, würde man entnehmen können aus der Verbreiterung der Spektrallinien durch zugesetzte Gase[1]), wenn genügend Messungen auf diesem Gebiete vorlägen. Leider ist das nicht der Fall, so daß wir uns vorläufig begnügen müssen mit der Bemerkung, daß die Größe τ von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-26}$ sein muß (Ladung eines Elektrons mal Quadrat eines Moleküldurchmessers).

Die Größe d schließlich folgt aus der van der Waalsschen Konstante b, da bekanntlich

$$b = 4N \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{2\pi}{3} N d^3.$$

Andererseits folgt b selbst aus dem kritischen Molekularvolumen $v_k = 3b$ oder wenn dieses, wie meistens, nicht beobachtet ist, aus kritischem Druck und kritischer Temperatur nach der Formel

$$\frac{RT_k}{p_k} = 8b. \tag{22}$$

Um nun zu zeigen, inwieweit die für die van der Waalssche Konstante abgeleitete Formel ein Bild der tatsächlichen Verhältnisse gibt, gebe ich die Tabelle I.

In der ersten Kolonne stehen die Namen der Gase, in der zweiten und dritten Kolonne sind die beobachteten Werte für kritische Temperatur und kritischen Druck eingetragen (letzterer in Atmosphären). Die vierte Kolonne enthält die aus diesen Angaben berechnete van der Waalssche Konstante a, die fünfte Kolonne entsprechend gerechnet, die zweite die van der Waalssche Konstante b. Aus letzterer folgen dann in der sechsten Kolonne die Durchmesser d. Schließlich enthält die siebente Kolonne die aus den beobachteten Brechungsexponenten abgeleitete Molekularrefraktion.

Nunmehr werden in (21) die Werte von a, P_0 und d eingesetzt und daraus das mittlere elektrische Trägheitsmoment τ berechnet.

1) Es ist offenbar gerechtfertigt, mit dem Grenzwerte für die Schwingungszahl o zu rechnen. Man bedenke, nur, daß die Eigenschwingungszahlen der für die Dispersion maßgebenden Elektronen von der Größenordnung 10^{15} sec^{-1} sind und stelle dieser Zahl gegenüber die Anzahl Male, daß ein Molekül bei mittlerer Temperatur einen Moleküldurchmesser zurücklegt. Die letztere Zahl hat die Größenordnung 10^{12} sec^{-1}.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **20**, 160, 1919; J. Holtsmark, diese Zeitschr. **20**, 162, 1919; J. Holtsmark, Ann. d. Phys. **58**, 577, 1919.

Soll unsere Theorie Vertrauen verdienen, dann müssen sich für τ Werte von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-26}$ ergeben. Die letzte Kolonne der Tabelle zeigt, daß dem wirklich so ist. Auch mag noch hingewiesen werden auf den a priori zu erwartenden Anstieg der τ-Werte mit zunehmender Kompliziertheit des Moleküls, ein Verhalten, welches die drei zuletzt angeführten Zahlen wirklich zeigen.

§ 5. Die Oberflächenspannung.

Nachdem wir nun behaupten im Besitze des wirklichen Kraftgesetzes zwischen den Molekülen zu sein[1]), ist damit zugleich genau definiert, was man unter dem Radius der Wirkungssphäre eines Moleküls zu verstehen hat. Diese Größe aber ist von wesentlicher Bedeutung bei der Berechnung der Oberflächenspannung und wir werden demnach hoffen können, die beobachteten Werte derselben direkt aus der van der Waalsschen Kohäsionskonstanten berechnen zu können. Eine genaue Theorie derselben müßte Rücksicht nehmen auf die Temperaturbewegung. Hier wollen wir statt dessen uns begnügen mit einer Theorie, welche die Temperaturabhängigkeit noch unbeachtet läßt und welche uns also nur die auf $T = 0$ extrapolierten Werte der Oberflächenspannung zu liefern vermag[2]).

Senkrecht zur Oberfläche der Flüssigkeiten rechnen wir eine z-Koordinate, welche in der Oberfläche selbst den Wert 0 hat, außerhalb der Flüssigkeit positiv und innerhalb derselben negativ ist. Nimmt man nun einen Aufpunkt in der Nähe der Oberfläche an, so wird es keine Moleküle mehr geben, welche im positiven z-Gebiet liegen, so daß auch das mittlere Quadrat der elektrischen Feldstärke stetig abnehmen muß, wenn man sich aus dem Innern der Flüssigkeit durch die Begrenzungsfläche hindurch in den materiefreien Raum begibt. Es ist eine elementare Rechnung, durch welche die Abhängigkeit von $\overline{\mathfrak{E}^2}$ von der z-Koordinate bestimmt wird. Das Resultat derselben wird durch die folgenden Formeln und die zugehörige Fig. 2 dargestellt.

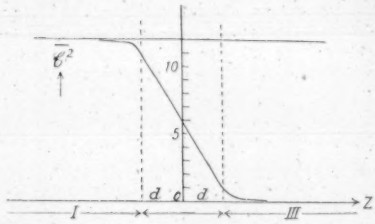


Fig. 2.

$$\text{I)} \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{12\pi}{5} \frac{n\tau^2}{d^3} + \frac{\pi}{5} \frac{n\tau^2}{z^3},$$

$$\text{II)} \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{\pi}{5} \frac{n\tau^2}{d^3} \left(6 - 5\frac{z}{d}\right),$$

$$\text{III)} \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{\pi}{5} \frac{n\tau^2}{z^3}.$$

Im Innern der Flüssigkeit, genügend weit unterhalb der Oberfläche, gilt nach Formel I der alte Wert von $\overline{\mathfrak{E}^2}$. Nähert man sich derselben, so muß von diesem Werte ein Betrag abgezogen werden, welcher umgekehrt proportional der fünften Potenz der Tiefe unter der Oberfläche ist. Dieses gilt bis zum Abstande d von der Oberfläche. Von da an nimmt, wie Formel II zeigt, das mittlere Quadrat der Feldstärke proportional mit z ab, bis ein Punkt erreicht wird, welcher um d über der Oberfläche liegt. Hier setzt die Formel III ein, wonach nunmehr mit steigender Koordinate $\overline{\mathfrak{E}^2}$ umgekehrt proportional mit der fünften Potenz des Abstandes von der Oberfläche abnimmt.

Wir denken uns nun eine Flüssigkeit vom Volumen V mit einer Oberfläche F. Mit Rücksicht auf die Veränderungen, welche $\overline{\mathfrak{E}^2}$ in der Nähe der Oberfläche erfährt, würde es fehlerhaft sein, wenn man die gesamte potentielle Energie einfach proportional dem Volumen ansetzen würde. Vielmehr kommt noch ein der Oberfläche proportionaler Betrag hinzu. Bedeutet wieder n die Zahl der Moleküle pro Kubikzentimeter, so findet man leicht für die ganze potentielle Energie den Wert

$$-\frac{6\pi}{5} a \frac{n^2\tau^2}{d^3} V + \frac{3\pi}{8} a \frac{n^2\tau^2}{d^4} F \qquad (23)$$

auf Grund der eben angegebenen Formeln I, II, III. Man kann nun die Oberflächenspannung definieren als Energie pro Flächeneinheit der Oberfläche und erhält demnach

1) Tatsächlich wird in dieser Notiz nur das im Gase vorhandene mittlere Quadrat der elektrischen Feldstärke gebraucht, eine Größe, welche als aus dem Kraftgesetz abgeleitet angesehen werden kann. Aus unseren Voraussetzungen folgt übrigens ohne weiteres, daß bei den hier betrachteten, normalen Gasen die Anziehung umgekehrt proportional der 9. Potenz der Entfernung zweier Moleküle ist. Bei anomalen Dipolgasen wäre sie umgekehrt proportional der 7. Potenz. Man sieht, wie die Theorie den vielfach gezogenen Schlüssen über die starke Abnahme der van der Waalsschen Anziehung mit zunehmendem Abstande entspricht.

2) In den Arbeiten von E. Madelung, diese Zeitschr. **14**, 729, 1913, und von M. Born und R. Courant, diese Zeitschr. **14**, 731, 1913, wird eine Theorie der Temperaturabhängigkeit entworfen, während eine Deutung des Absolutwertes nicht versucht wird. Letzteres ist hier die Hauptsache.

Tabelle II.

	T_k	p_k atm.	a dyne cm^4	b cm^3	d cm	$\frac{\varrho}{M}$ cm^{-3}	$\sigma_{ber.}$ dyne cm^{-1}	$\sigma_{beob.}$ dyne cm^{-1}
$C_4H_{10}O$ . .	467	35,6	$17,5 \cdot 10^{12}$	134	$4,72 \cdot 10^{-8}$	$0,96 \cdot 10^{-2}$	24	46
C_6H_6 . . .	561	47,9	18,9 „	120	4,56 „	1,12 „	34	59
C_6H_{14} . . .	508	29,6	24,9 „	175	5,15 „	0,77 „	24	42
CS_2	548	76	11,3 „	73,5	3,86 „	1,66 „	38	72

$$\sigma = \frac{3\pi}{8} a \frac{n^2\tau^2}{d^4}. \qquad (24)$$

Eine übersichtlichere Form erhält die Beziehung, wenn man diese Darstellung für die Oberflächenspannung mit der früheren (18) für die van der Waalssche Konstante a vergleicht; so erhält man

$$\frac{\sigma}{a} = \frac{5}{16} d \left(\frac{\varrho}{M}\right)^2. \qquad (25)$$

Inwieweit mittels dieser Formel ein richtiger Wert von σ berechnet werden kann, möge durch Tabelle II veranschaulicht werden.

In den ersten drei Kolonnen derselben sind chemische Formeln, kritische Temperatur und kritischer Druck der Substanz angegeben. Dann folgen in der 4., 5. und 6. Kolonne die daraus nach den van der Waalsschen Formeln berechneten Werte von a, b und d. In der 7. Kolonne ist schließlich das reziproke Molekularvolumen $\frac{\varrho}{M}$ angegeben. Die vorletzte Spalte enthält die nach diesen Daten mittels (25) berechnete Oberflächenspannung. Um einen Vergleich mit dem Experiment möglich zu machen, ist es nötig, die beobachteten Werte der Oberflächenspannung auf die Temperatur $T = 0$ zu extrapolieren. Das geschah mit Hilfe des Eötvösschen Gesetzes. So entstanden die Werte der letzten Spalte. Man sieht, daß die Größenordnung durch die theoretische Formel richtig getroffen worden ist. Daß keine vollständige zahlenmäßige Übereinstimmung entsteht, ist eine Erscheinung, welche bekanntlich bei allen Anwendungen der van der Waalsschen Gleichung zutage tritt[1]).

Man kann die Bedeutung der Formel für die Oberflächenspannung auch noch durch folgende Überlegungen beleuchten: Nach dem Eötvösschen Gesetz ist

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = 2{,}1\,(T_k - T) \qquad (26)$$

oder in der Grenze für $T = 0$

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = 2{,}1\,T_k. \qquad (26')$$

Andererseits gilt nach unseren Überlegungen Gleichung (25). Mit Hilfe derselben findet man

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = \frac{5}{16}\left(\frac{\varrho}{M}\right)^{4/3} a d.$$

Andererseits ist nach der van der Waalsschen Gleichung das Grenzvolumen, welches die Substanz bei $T = 0$ einnimmt gleich b, während $b = \frac{2\pi}{3} N d^3$ ist. Demnach kann für die Größe d substituiert werden

$$d = \left(\frac{3}{2\pi}\frac{b}{N}\right)^{1/3}.$$

Tut man das, so nimmt die Formel für die molekulare Oberflächenenergie die Form an

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = \left(\frac{\varrho}{M}\right)^{1/3} \frac{5}{16} d\, a = \frac{5}{16}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{N^{1/3}} \frac{a}{b}.$$

Andererseits wissen wir, daß

$$\frac{a}{b} = \frac{27}{8} RT_k = \frac{27}{8} N \cdot kT_k$$

unter Einführung der Boltzmannschen Konstante $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg an Stelle der universellen Gaskonstante R. Benutzen wir diesen Zusammenhang mit der kritischen Temperatur, so ergibt sich also

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = \frac{135}{128}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/3} N^{2/3} kT_k. \qquad (27)$$

Tatsächlich ergibt also die Theorie Proportionalität der molekularen Oberflächenenergie mit der kritischen Temperatur. Für die Eötvössche Konstante findet man ein Vielfaches von $N^{2/3}k$, was offenbar zu erwarten ist und was auch Madelung, sowie Born und Courant fanden bei ihrer Theorie des Temperaturfaktors im Eötvösschen Gesetz. Setzt man Zahlenwerte ein, so wird die Konstante jenes Gesetzes mit

$$k = 1{,}37 \cdot 10^{-16} \text{ und } N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$$

1) Es möge z. B. genügen daran zu erinnern, daß nach der van der Waalsschen Gleichung

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} = \frac{8}{3} = 2{,}67$$

ist, während sich für die normalen Stoffe im Mittel experimentell

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} = 3{,}7$$

ergibt.

gleich 0,82. Die Proportionalität in der kritischen Temperatur ist vorhanden, der Zahlenfaktor ist wieder, wie nicht anders zu erwarten, von dem experimentellen Faktor erheblich verschieden.

Man kann versuchen sowohl zur Berechnung der Oberflächenspannung, wie auch zur Berechnung der Eötvösschen Konstante einen Weg zu beschreiten, welcher nicht so weitgehende Extrapolationen erfordert, wie sie im obigen insbesondere zur Berechnung von van der Waalsscher Anziehung und Molekularvolumen angewandt worden sind. Offenbar kann der Wert von a mit erheblich mehr Sicherheit für den flüssigen Zustand berechnet werden, wenn man statt kritischer Größen nur Beobachtungen nimmt, welche sich auf den flüssigen Zustand selbst beziehen. Nun hat man um die Masse M einer Flüssigkeit zu verdampfen, eine Arbeit zu leisten, welche durch die molekulare Verdampfungswärme A gemessen wird. Andererseits ist die potentielle Energie, welche geleistet werden muß, um die Moleküle der Masse M in so weiten gegenseitigen Abstand zu bringen, daß die molekularen Kräfte vernachlässigbar sind, nach den obigen Überlegungen gleich

$$\frac{6\pi}{5}\frac{N^2 a\tau^2}{d^3}\frac{\varrho}{M}.$$

Bis auf geringe Korrektionen (wegen der Leistung äußerer Arbeit und der Differenz der Energie der Molekularbewegung in Gas und Flüssigkeit) hat man demnach

$$A = \frac{6\pi}{5}\frac{N^2 a\tau^2}{d^3}\frac{\varrho}{M}. \qquad (28)$$

Andererseits ist

$$a = \frac{6\pi}{5}\frac{N^2 a\tau^2}{d^3},$$

so daß sich ergibt

$$a = A\frac{M}{\varrho}. \qquad (29)$$

In Tabelle III sind für dieselben Substanzen wie oben in der ersten Spalte angegeben die chemischen Formeln, in der zweiten die beobachtete Verdampfungswärme, in der dritten die daraus nach (29) berechnete van der Waalssche Aktraktionskonstante und in der vierten die nach (25) folgende Oberflächenspannung. Die letzte Spalte enthält schließlich zum Vergleich die beobachteten Werte.

Tabelle III.

	$A_{beob.}$ cal	a dyne cm^4	$\sigma_{ber.}$ dyne cm^{-1}	$\sigma_{beob.}$ dyne cm^{-1}
$C_4H_{10}O$ . .	6900	$30 \cdot 10^{12}$	41	46
C_6H_6 . . .	7800	29 „	52	59
C_7H_{14} . .	7700	42 „	40	42
CS_2 . . .	6800	17 „	57	72

Die Übereinstimmung ist jetzt eine gute.

Im gleichen Gedankengange beharrend kann man versuchen, auch für die Eötvössche Konstante einen besseren Wert zu berechnen. Bekanntlich ist die praktische Grenzdichte wesentlich größer als die nach dem van der Waalsschen Gesetz zu berechnende, man findet im Mittel für das Verhältnis dieser beiden Größen den Wert 1,82[1]). Rechnet man also mit der wirklichen Dichte, so bedingt das in der Eötvösschen Konstante einen zusätzlichen Faktor im Werte $(1{,}82)^{\frac{2}{3}}$. Damit wird dieselbe 1,8 statt dem früher gefundenen Werte 0,82, nähert sich also erheblich mehr der experimentellen Zahl 2,1.

§ 6. Schlußbemerkungen.

Betrachtet man das Gesamtbild, so kann man meines Erachtens nicht umhin, die Wahrscheinlichkeit unserer Auffassung der van der Waalsschen Attraktionskräfte und damit ihren elektrischen Ursprung zuzugeben. Dann aber ist der am Anfang angekündigte Zusammenhang zwischen den optischen Konstanten einerseits und den van der Waalsschen Konstanten andererseits erreicht und man kann nun umgekehrt das große Erfahrungsmaterial bezüglich der Zustandsgleichung benutzen, um daraus auf die elektrischen Hauptträgheitsmomente der Moleküle zu schließen. Ich bin nicht der Ansicht, daß die in Tabelle I angegebenen Zahlen für jene Größe mehr als eine Größenordnung derselben darstellen. Das liegt meines Erachtens nicht an der Grundlage der Theorie, sondern an der Ausführung, die in quantitativem Sinne gleich mangelhaft ist, wie die van der Waalssche Gleichung mit konstantem a und b. Es liegt aber gar kein Anlaß vor, bei der hier gegebenen Übersicht, welche für eine erste Orientierung genügen mag, stehen zu bleiben. Der richtige Weg scheint mir der zu sein, daß man die Zustandsgleichung schreibt in der von Kamerlingh-Onnes schließlich bevorzugten Form

$$pv = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{v} + \frac{\mathfrak{C}}{v^2} + \cdots$$

mit Virialkoeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ usw. Tatsächlich haben wir zur Berechnung jener Koeffizienten als Temperaturfunktion eine völlig einwandfreie und strenge Methode, welche auf dem Boltzmann-Maxwellschen Gesetz basiert und schon

1) Diese Zahl entstand durch Kombination der Angaben über den Zusammenhang von den praktischen Werten für kritische Dichte und Grenzdichte mit den theoretischen in J. P. Kuenen, l. c. S. 60 und 83.

in mehreren Arbeiten von Keesom benutzt worden ist. Es kommt nur darauf an, die von Keesom eingeführten Kräfte zwischen den Molekülen zu vervollständigen durch die hier hauptsächlich betrachteten. Eine Arbeit, welche diesen Gedankengang für die anormalen Dipolgase durchführt, ist im Gange. Ich erhoffe von derselben unter anderem die Möglichkeit einer erneuten Berechnung der elektrischen Molekularmomente und damit die Herstellung des quantitativen Zusammenhangs zwischen den Beobachtungen über die Zustandsgleichungen einerseits und den Beobachtungen über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten andererseits [1]).

Daneben wird es nötig sein, die Oberflächenerscheinungen insbesondere in ihrer Temperaturabhängigkeit näher zu verfolgen. Auch dürfte es nunmehr möglich sein, die merkwürdigen Beeinflussungen der Oberflächenspannung durch geringe Mengen fremder Zusätze molekulartheoretisch zu deuten. Damit kommen wir in das Gebiet der Mischungen, in dem auch, ohne daß man die Oberflächenerscheinungen so stark in den Vordergrund rückt, die nach der Theorie leicht erhältliche Mischungsformel für die van der Waalssche Attraktionskonstante nützlich sein dürfte.

Die Hauptsache, welche bei der genauen Theorie zu erreichen ist, scheint mir allerdings die Erzielung quantitativ richtiger Zahlen für elektrische Momente und elektrische Trägheitsmomente, welche man bei der Prüfung und Aufstellung detaillierter Molekülmodelle zugrunde legen kann.

1) Rechnungen dieser Art sind inzwischen von Herrn Falkenhagen ausgeführt worden und haben meine Erwartung bestätigt.

Göttingen, Physikalisches Institut, 29. Januar 1920.

Zusatz bei der Korrektur.

Das Bestreben, einen zweiten, unabhängigen Weg zur Bestimmung des mittleren elektrischen Trägheitsmomentes τ zu gewinnen, führte mich inzwischen dazu, die Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung mit in die Betrachtung hineinzuziehen. Die einzige Formel, welche jene Abhängigkeit für höhere Temperaturen befriedigend darstellt, ist die Sutherlandsche. Sie lautet:

$$\eta = \frac{C\sqrt{T}}{1 + \frac{\Theta}{T}},$$

wenn η der Reibungskoeffizient ist und C und Θ zwei für das Gas charakteristische Konstanten bedeuten. C ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Moleküldurchmessers und mißt im wesentlichen die freie Weglänge, wie sie sein würde, wenn zwischen den Molekülen keine Kräfte vorhanden wären; Θ ist eine für das Gas charakteristische Temperatur, welche proportional ist der potentiellen Energie zweier Moleküle im Augenblicke der Berührung dividiert durch die Boltzmannsche Konstante k.

Es wäre nun nicht möglich gewesen, von jener Sutherlandschen Formel den richtigen Gebrauch für unsere Zwecke zu machen, wenn nicht die Zahlenkoeffizienten mathematisch einwandfrei bekannt wären. Die zu dieser Bestimmung notwendige Rechnung ist aber inzwischen ausgeführt worden in einer unter Leitung von Oseen angefertigten Dissertation von Enskog. Diese enthält in bezug auf unsere Frage das folgende Resultat:

Ist die anziehende Kraft K zwischen zwei Molekülen der νten Potenz der reziproken Entfernung proportional, so daß

$$K = \frac{c}{r^\nu},$$

dann ergibt sich für die innere Reibung die Sutherlandsche Formel mit

$$\Theta = \frac{217}{205}\frac{2\Delta}{3}\frac{Nc}{(\nu-1)d^{\nu-1}R}$$

und

$$C = 1{,}015\,\frac{5}{16\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{MR}}{Nd^2},$$

wobei 2Δ ein Zahlenfaktor ist, welcher noch von der Potenz im Kraftgesetz abhängt und für den Enskog eine Tabelle gibt [1]).

Nach unserem Ansatz ist nun die potentielle Energie zweier Moleküle im Abstande r gleich

$$-a\overline{\mathfrak{E}^2} = -\frac{3a\tau^2}{r^8},$$

wobei für $\overline{\mathfrak{E}^2}$ nach (14) der im Abstande r gültige Mittelwert eingesetzt ist. Die Kraft K wird also

$$K = \frac{24a\tau^2}{r^9}.$$

Andererseits gibt Enskog für $\nu = 9$ an $2\Delta = \frac{7}{15}$; alles in allem ergibt sich also unter Einführung der Molekularrefraktion $P_0 = \frac{4\pi}{3}Na$ an Stelle von a:

1) Enskog bezeichnet den Zahlenfaktor mit 2δ; wir schreiben statt dessen 2Δ, weil der Buchstabe δ schon als Bezeichnung für die Dielektrizitätskonstante verbraucht ist.

Tabelle IV.

	Θ	C g cm^{-1} sec^{-1}	d cm	τ g $^1/_2$ cm $^7/_2$ sec^{-1}	d cm	τ g $^1/_2$ cm $^7/_2$ sec^{-1}
He	75	$1.46 \cdot 10^{-5}$	$1{,}92 \cdot 10^{-8}$	$4{,}33 \cdot 10^{-26}$	$2{,}44 \cdot 10^{-8}$	$2{,}84 \cdot 10^{-26}$
A	162	2,04 „	2,88 „	11,4 „	2,93 „	11,2 „
Kr	188	2,38 „	3,20 „	15,5 „	3,14 „	14,5 „
Xe	252	2,46 „	3,53 „	20,6 „	3,42 „	18,9 „
H_2	82	0,666 „	2,40 „	5,60 „	2,36 „	3,20 „
N_2	113	1,43 „	3,15 „	13,4 „	3,12 „	13,3 „
O_2	137	1,76 „	2,94 „	11,7 „	2,90 „	11,2 „
C_2H_4	226	1,04 „	3,70 „	24,4 „	3,54 „	22,8 „

$$\Theta = \frac{217}{205}\,\frac{7}{29\pi}\,\frac{P_0\tau^2}{Rd^3},$$

$$C = 1{,}015\,\frac{5}{16\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{MR}}{Nd^2}.$$

Aus dem experimentell bestimmten Werte von C folgt also der Moleküldurchmesser d; die Sutherlandsche Temperatur Θ liefert danach das mittlere elektrische Trägheitsmoment τ. In der obigen Tabelle IV steht in der ersten Kolonne der Name des Gases, in der zweiten folgen die Werte von Θ, in der dritten die von C, wie sie aus den Beobachtungen folgen. Die vierte Kolonne enthält den aus C berechneten Durchmesser d, die fünfte das aus Θ und C, berechnete Trägheitsmoment τ. Zum Vergleich mit dem früheren sind eine sechste und eine siebente Kolonne hinzugefügt, welche die Werte von d und τ enthalten, wie wir sie früher mit Hilfe der kritischen Daten gefunden haben.

Die Übereinstimmung der auf beiden Wegen gefundenen Werte von d und τ ist (mit Ausnahme der Zahlen für He und H_2) viel besser, als ich zu erwarten gewagt hatte. Es entspricht also offenbar unser Kraftgesetz und seine Deutung vollständig der Wirklichkeit[1]).

1) Aus unserer Formel für Θ kann auch gefolgert werden, daß die Sutherlandsche Temperatur Θ der kritischen Temperatur T_k proportional ist. Als Proportionalitätsfaktor ergibt sich $\Theta/T_k = \frac{217}{205}\,\frac{7}{8} = 0{,}925$, während aus den experimentellen Daten für die oben angegebenen Gase unter Ausschluß von H_2 und He im Mittel folgt $\Theta/T_k = 0{,}904$.

Göttingen, 17. März 1920.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

Die Grundform des mechanisch-akustischen Schwingungskörpers. (Der Tonpilz.)

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Bei unseren Versuchen zur Herstellung von Schallgebern und Schallempfängern wurden wir vor die Aufgabe gestellt, akustische Schwingungsgebilde zu bauen, in denen die beiden maßgebenden Größen — Masse und Elastizität — klar und eindeutig voneinander getrennt waren. Während bei den in der Technik gebräuchlichen elektrischen quasistationären Schwingungskreisen — von Resonanzspulen abgesehen — praktisch stets Selbstinduktion und Kapazität getrennt sind, und es auch bis zu den Frequenzen der Telegraphie mit elektrischen Wellen hinauf keine besonderen Schwierigkeiten macht, genügend kapazitätsfreie Selbstinduktionen und induktionsfreie Kapazitäten herzustellen, ist in der Akustik auf eine reinliche Scheidung von Masse und Elastizität bisher scheinbar noch kein Gewicht gelegt worden. Bei fast allen bekannten akustischen Schwingungskörpern, wie beispielsweise den Saiten, Membranen, Glocken, Stimmgabeln, sind Masse und Elastizität ziemlich gleichmäßig verteilt, und eine gewisse Ausnahme scheint nur der geschlossene oder Helmholtzsche Resonator zu machen, in dem die Schwingungsenergie in potentieller Form im Resonatorraum und in kinetischer Form in der Öffnung lokalisiert erscheint.

Alle gewöhnlichen Schwingungskörper mit verteilter Masse und Elastizität zeigten bei unseren Versuchen die störende Eigenschaft, daß sie ihre Schwingungsform änderten, d. h. ihre Knotenpunkte verschoben, sobald man an Stellen größerer Amplitude mit stark erregenden oder abbremsenden Kräften angriff. Wurde z. B. eine Stimmgabel zwischen den Zinken erregt und mit dem Stiele auf eine strahlende Fläche gesetzt, so wanderten bei zunehmender Erregung und Strahlungsleistung die beiden freien Knotenpunkte der Gabel nach dem Stiele zu, wobei die Resonanzfrequenz allmählich abnahm und die Gabel wie zwei fest-freie Stäbe schwang.

Ganz allgemein versuchte der Schwingungskörper immer eine Form anzunehmen, in der möglichst wenig Energie aufgenommen bzw. abgegeben wurde. Wir erkannten, daß es zur Verhinderung dieser Eigenschaft notwendig war, Masse und Elastizität vollkommen zu trennen und die Schwingungsamplituden möglichst in eine Gerade, die am besten die Schwerpunkts-

linie war, zu legen. Durch diese Maßnahme mußte dann eine Verschiebung der Knotenpunkte unmöglich werden. Bei der weiteren Verfolgung dieses Gedankens trat uns eine einfache und reine Form des mechanisch-akustischen Schwingungskörpers entgegen, die man als die Grund- und Urform jedes mechanisch-akustischen Schwingungsgebildes bezeichnen kann. Diese besteht aus zwei elastizitätsfreien Massen, die durch eine masselose Elastizität miteinander verbunden sind und sich in Richtung der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte bewegen.

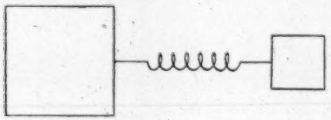


Fig. 1.

In der Fig. 1 ist ein solcher Schwingungskörper schematisch dargestellt, wobei als Elastizität beispielsweise eine Spiralfeder gewählt ist. Diese besondere Form des Schwingungskörpers ist praktisch wohl geeignet zur Erzeugung niederer Schwingungszahlen, würde aber kaum mehr anwendbar sein, wenn man in das Gebiet der Akustik gelangt, d. h. zu Schwingungszahlen, die durch das menschliche Ohr als Töne wahrgenommen werden. Handelt es sich gar um die Erzeugung relativ hoher Töne, so müßten die Massen so klein und die Feder so stark werden, daß man die Federmasse praktisch keinesfalls mehr gegen die freien Massen vernachlässigen kann. In diesen Fällen wird man die mit der denkbar geringsten Masse zu bauende kleinste Elastizität benutzen, und das ist der longitudinal-deformierte Stab[1]). Damit zeitlich der Vorgang in allen Stabquerschnitten der gleiche, d. h. quasistationär ist, muß die Stablänge kleiner als $\frac{\lambda}{4}$ sein, wenn λ die Wellenlänge des betreffenden Tones im Stabmaterial ist. Diese besondere Form des einfachen akustischen Schwingungskörpers ist schematisch in Fig. 2 dargestellt. Wir haben diesen Schwingungskörper den akustischen Pilz oder Tonpilz genannt. Wir haben solche Schwingungskörper für tiefe und hohe Töne und in den verschiedensten Abmessungen gebaut und gefunden, daß sie ebenso rein und ungedämpft klingen wie Stimmgabeln. Wie wir später sehen werden, hat man in der Wahl der Masse und in den Stababmessungen ein bequemes Mittel, um praktisch in weiten Grenzen die Schwingungszahl variieren zu können.

Fig. 2.

1) Dieser Vorschlag stammt von Herrn A. du Bois-Reymond, Kiel.

Bei näherer Betrachtung findet man, daß sich alle bekannten mechanischen und akustischen Schwingungsgebilde auf diese einfachste Form zurückführen lassen. Beispielsweise wird bei einer in einem Ringe eingespannten Membran die eine Masse durch die Schwingungsmasse der Membran selbst[1]), die andere Masse durch die Ringmasse und die Elastizität durch diejenige der Membran dargestellt. Es kann eine von beiden Massen sehr viel größer als die andere und praktisch unendlich groß werden, wie es beispielsweise bei einer fest in einen großen Klotz eingespannten dünnen Blattfeder der Fall ist. Sehr häufig wird in solchen Fällen die zweite Masse gar nicht beachtet und man ist nicht gewohnt sie als zum Schwingungsgebilde gehörig zu betrachten, wie z. B. die Masse, an der ein Pendel aufgehängt ist, in der bekannten Gleichung des Pendels gar nicht erscheint. Man muß sich in diesem Fall aber stets klar sein, daß dies nur statthaft ist, wenn die eigentliche Schwingungsmasse, z. B. die des Pendels klein gegenüber der anderen Masse, z. B. derjenigen der Aufhängung ist.

Um über die Verteilung der Schwingungsenergie im Tonpilz ein Bild zu gewinnen und die Eigenschwingungszahl zu finden, stellen wir die Schwingungsgleichungen auf und beschränken uns hierbei auf die ungedämpfte Schwingung. Bezeichnen wir mit x_1 und x_2 die Momentanwerte des Ausschlages der beiden Massen m_1 und m_2 und mit c die Größe der Elastizität des elastischen Verbindungsgliedes, so sind die Kräftegleichungen für die beiden Massen

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{x_1 - x_2}{c} = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - \frac{x_1 - x_2}{c} = 0.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen findet man

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0$$

und erkennt hieraus, daß sich die Maximalamplituden umgekehrt wie die Massen ver-

1) W. Hahnemann u. H. Hecht, Schallfelder und Schallantennen, diese Zeitschr. 17, 601, 1916.

halten und entgegengesetzt gerichtet sind. Nennen wir die in den beiden Massen schwingenden Energien E_1 und E_2 und die maximalen Amplituden der Massen a_1 und a_2, so verhält sich

$$E_1 : E_2 = m_1 a_1^2 : m_2 a_2^2$$

oder auch, da

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1 \text{ ist,}$$
$$E_1 : E_2 = m_2 : m_1.$$

Hieraus erkennt man, daß sich die Schwingungsenergien umgekehrt wie die Massen verhalten, und daß die ganze Schwingungsenergie praktisch in der kleineren Masse steckt, wenn die andere Masse sehr groß geworden ist. Nur für diesen Fall kann man sich beim Schwingungsvorgang auf Betrachtung der einen Masse allein beschränken und die andere als ruhend annehmen. Will man die Schwingung eines Tonpilzes also wirksam dämpfen, so wird man mit den abbremsenden Kräften an der kleineren Masse angreifen, wie man umgekehrt, um möglichst ungedämpfte Tonpilze zu bauen, das Massenverhältnis sehr groß wählen und die größere Masse zur Befestigung oder Aufstellung des Pilzes verwenden wird. Auch bei dünnen Membranen in dicken Einspannringen oder dünnen Blattfedern in großen Klötzen steckt die gesamte Schwingungsenergie praktisch vollständig in der Membran oder in der Feder und die Befestigungsteile werden um so weniger dämpfende Wirkung ausüben können, je mehr Masse sie haben.

Durch die Tatsache, daß sich die Schwingungsamplituden umgekehrt wie die Massen verhalten, erkennt man, daß der Knotenpunkt mit dem Schwerpunkt des Systems zutammenfällt und daher bei Gleichheit der beiden Massen in der Mitte des Stabes liegt, während er bei Ungleichheit immer mehr an die größere Masse heranrückt, um sich mit dieser praktisch zu vereinigen, wenn sie sehr viel mal größer als die kleinere Masse geworden ist.

Die Eigenschwingungszahl des Systems ω in 2π Sekunden findet man durch einfache Rechnung zu

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{c} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}},$$

was in

$$\omega = \sqrt{\frac{q \cdot E}{l} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$$

übergeht, wenn man einen Stab von der Länge l, dem Querschnitt q und dem Elastizitätskoeffizienten E benutzt. Hierbei ist entsprechend dem Ausgange der Betrachtung die Masse des Stabes als vernachlässigbar klein gegen die freie Schwingungsmasse angenommen, eine der Eigenschaften, durch die ja gerade diese einfachste Form des Schwingungskörpers ihre große Bedeutung für uns gewonnen hat. Bei kleiner Stabmasse kann man durch eine einfache Korrektur diese Stabmasse einführen und findet, daß man die freien Massen m_1 und m_2 durch die Ausdrücke

$$m_1 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m_s}{m_1} \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

und

$$m_2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m_s}{m_2} \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

zu ersetzen hat, wenn m_s die Stabmasse darstellt und klein gegenüber m_1 und m_2 ist. Die Tatsache, daß die Stabmasse, wenn auch praktisch sehr gering, so doch tatsächlich immer vorhanden ist, bedingt außer dieser Korrektur der eigentlichen Schwingungszahl des Tonpilzes, die im allgemeinen nur wenige Promille betragen wird, auch das Auftreten einer neuen Schwingungsform, indem der Stab wie eine Saite schwingt, die zwischen den beiden Massen ausgespannt ist. Diese Querschwingungszahl wollen wir uns aber im allgemeinen so weit von der Hauptschwingungszahl entfernt denken, daß sie keinen Einfluß auf die letztere auszuüben imstande ist. Wir denken uns diese Nebenschwingung weit oberhalb der Hauptschwingungszahl des Tonpilzes liegend, da bei Lagen unterhalb wieder Nebenschwingungen höherer Ordnung auftreten, die dann die Rolle des Grundtones der Nebenschwingung übernehmen würden. Ein Mittel zur praktischen Durchführung dieser Forderung besteht gegebenenfalls darin, daß man keinen Stab, sondern ein Rohr von gleichem Querschnitt anwendet, das gegenüber dem Stab eine mit der vierten Potenz des Durchmessers abnehmende Querelastizität bei gleichbleibender Longitudinalelastizität besitzt.

Durch die Eigenschaft, die Amplituden umgekehrt wie die Massen einzustellen, hat der Tonpilz für alle die Fälle eine große praktische Bedeutung erlangt, in denen eine Amplitudenübersetzung, d. h. ein akustischer Hebel gefordert wird. Handelt es sich um Schallgeber und -empfänger für Luft oder Wasser, die beispielsweise elektrisch erregt und abgebremst werden sollen, so ergibt sich eine derartige Forderung der Amplitudenübersetzung sofort, wenn man auf gute Wirkungsgrade Gewicht legt. Die Charakteristik des Ankers eines Elektromagneten oder einer Spule in einem konstanten Magnetfelde, d. h. die Änderung ihrer Zugkraft auf die Einheit der Weglänge hat im allgemeinen solche Werte, daß bei Anwendung prak-

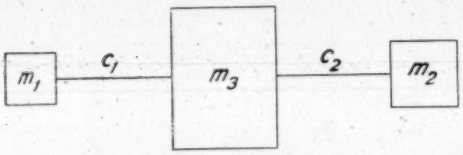


Fig. 3.

tisch möglicher Schallantennen dieses Verhältnis, das wir für das freie Medium Schallhärte[1]) genannt haben, zwischen den Werten für Luft und Wasser steht. Wollte man also Schallgeber für Wasser so bauen, daß man die strahlende Fläche direkt elektromagnetisch erregte, so würde man im allgemeinen sehr schlechte Wirkungsgrade erhalten, da das Wasser viel schallhärter als der elektrische Erreger ist. Schalten wir dagegen einen akustischen Tonpilz ein und bringen die elektrische Erregung an der kleineren Masse und die strahlende Antenne an der größeren Masse an, so erreichen wir bei passender Wahl des Massenverhältnisses, daß die im elektrischen Erreger mit großer Amplitude und kleiner Kraft schwingende Energie mit gutem Wirkungsgrade auf die Antenne übertragen wird, von der sie mit kleiner Amplitude und großer Kraft als Schallwelle abwandert. Bei Sendern und Empfängern für Luftschall liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt, und man muß eine Übersetzung von klein nach groß anwenden, wenn man vom elektrischen Erreger zu Luft übergeht. In welcher Weise diese Aufgabe zum Beispiel im gewöhnlichen Telephon gelöst wird, geht aus einer Arbeit[2]) von uns über den mechanisch-akustischen Aufbau eines Telephons und seinen Wirkungsgrad hervor.

Häufig werden die Schwingungsgebilde, die man in der technischen Akustik anzuwenden gezwungen ist, nicht aus solchen einfachen Schwingungskörpern bestehen, sondern aus zwei oder mehr miteinander gekoppelten Gebilden. Handelt es sich zum Beispiel um schallaufnehmende Membranen, so wird man sowohl diese wie den Detektor (Mikrophon, Telephon) abstimmen, um das Maximum an Lautstärke zu erhalten, und wird ähnlich wie in der Telegraphie mit elektrischen Wellen mit doppelwelligen Gebilden arbeiten. Ja, es kann der Fall eintreten und aus bestimmten Gründen sogar wünschenswert sein, daß unser Tonpilz infolge der Kopplung zwischen Quer- und Stabton schon doppelwellig wird, und daß wir bewußt mit diesen beiden Schwingungen arbeiten müssen.

Wir wollen daher einen besonders häufigen Fall der Kopplung zweier einfacher Schwingungskörper miteinander betrachten, wie er in Fig. 3 dargestellt ist, und in dem die beiden Einzelsysteme mit den Massen m_1 und m_3 bzw. m_2 und m_3 durch die gemeinsame Masse m_3 miteinander gekoppelt sind. Die Kräftegleichungen für die drei Massen des ungedämpft schwingenden Systems lauten:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{x_1 - x_3}{c_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_2 - \frac{x_3 - x_2}{c_2} = 0$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - \frac{x_1 - x_3}{c_1} + \frac{x_3 - x_2}{c_2} = 0.$$

Durch einfache Rechnung findet man als Bestimmungsgleichung für die Eigenschwingungszahlen

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{1}{c_1 m_1} + \frac{1}{c_1 m_3} + \frac{1}{c_2 m_2} + \frac{1}{c_2 m_3} \right) + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt zwei Wurzeln, die unter Benutzung der Ausdrücke für die freien Schwingungszahlen der beiden ungekoppelten Systeme

$$\omega_1^2 = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{m_1 + m_3}{m_1 \cdot m_3}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{c_2} \cdot \frac{m_2 + m_3}{m_2 \cdot m_3}$$

sich berechnen zu

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}}$$

1) Diese Zeitschr. **17**, 601, 1916. 2) Ann. d. Phys. **60**, 454, 1919.

Der Ausdruck

$$\frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}$$

stellt das Produkt der Verhältnisse von der im Kopplungsgliede schwingenden Energie zu der Gesamtenergie jedes Einzelsystems dar und soll mit k^2 bezeichnet werden. Ist die gemeinsame Masse m_3 klein gegenüber den freien Massen m_1 und m_2, so steckt praktisch die gesamte Schwingungsenergie im Kopplungsgliede und wir haben den Fall der sehr festen Kopplung: k^2 wird gleich eins. Wird m_3 dagegen größer als m_1 und m_2, so wird die Kopplung loser und es wird ungenähert

$$k^2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_3^2}$$

und bildet damit ein Analogon zu den Kopplungskoeffizienten zweier elektrischer Kreise mit gemeinsamer Selbstinduktion

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2},$$

wenn L_1 und L_2 die freien Selbstinduktionen und M der gemeinsame oder gegenseitige Induktionskoeffizient sind. Werden m_1 und m_2 klein gegenüber m_3, so haben wir den Fall der extremlosen Kopplung, und k^2 nähert sich der Null.

Führen wir k^2 in unsere obige Bestimmungsgleichung für ω^2 ein, so wird

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \\ + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k^2 \omega_1^2 \omega_2^2}.$$

Diese Formel ist in den weitesten Grenzen durch das Experiment bestätigt worden, auch wenn sie auf Kopplungskoeffizienten von nahezu null und eins angewandt wurde. Im ersteren Fall gehen, wie man ohne weiteres erkennt, die beiden gekoppelten Schwingungszahlen in die beiden freien über, im Falle des Kopplungskoeffizienten eins sind die beiden Schwingungsformen dadurch gekennzeichnet, daß einmal die kleine gemeinsame Masse m_3 mit parallel geschalteten Elastizitäten c_1 und c_2 schwingt, während die beiden freien Massen praktisch stillstehen, und daß zweitens die beiden freien Massen mit in Serie geschalteten Elastizitäten schwingen und in der Form eines einfachen Tonpilzes. Umgekehrt leiten sich aus dieser Betrachtung auf direktem Wege Schwingungszahlen ab, die Spezialfälle der oben mitgeteilten allgemeinen Formel sind.

Haben die beiden ungekoppelten Systeme gleiche Eigenfrequenz — ein Fall, der in der Praxis sehr häufig angestrebt wird — und ist

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0,$$

so wird

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + k},$$

ein Ausdruck, der für kleine Kopplungskoeffizienten in den von der Kopplung elektrischer Schwingungskreise her gebräuchlichen

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{k}{2}\right)$$

übergeht.

Durch die Betrachtung der Fig. 3 kann man der unmittelbaren Vorstellung die Tatsache näherbringen, daß durch die Kopplung zweier Schwingungsgebilde immer zwei Resonanzfrequenzen entstehen müssen und die Schwingungskörper stets das Bestreben haben, ihre Resonanzen auseinanderzudrängen, eine Erscheinung, die darin ihren Ausdruck findet, daß das tiefere System durch die Kopplung stets erniedrigt, das höhere erhöht wird.

Ist z. B. das System 1 in der Fig. 3 das tiefere und nehmen wir die drei Massen der Einfachheit der Betrachtung zuliebe als gleich an, so bedeutet dies, daß der Stab 1 im Gegensatz zum Stab 2 länger bzw. dünner ist. Für das System 1 bedeutet also die Kopplung mit dem System 2 das Anlegen der Masse 2 an die Masse 3 mit relativ kurzem dickem Stab, d. h. praktisch starre Befestigung der Masse 2 an der Masse 3, wobei die Schwingungszahl von System 1 erniedrigt werden muß. Für das höhere System 2 bedeutet die Kopplung mit System 1 das Hinzufügen einer im Vergleich zum Stab 2 geringen elastischen Kraft[1]) in Gestalt des Stabes 1 an die Masse 3 bei fast stillstehender Masse 1, d. h. Erhöhung der Schwingungszahl.

Es macht auch keine Schwierigkeiten, ohne Rechnung die Schwingungsphasen der einzelnen Massen gedanklich unmittelbar zu verfolgen, je nachdem ob die Erregung im tieferen oder höheren System erfolgt. Überhaupt ist dies Beispiel der beiden gekoppelten Schwingungsgebilde sehr geeignet für die Betrachtung aller Vorgänge, die bei der Kopplung auftreten und die im allgemeinen durch die Theorie[2]) in nur schwer diskutierbaren Formeln wiedergegeben werden.

Wir haben schon erwähnt, daß sich alle bekannten Schwingungsgebilde der Akustik auf die Grundform des Tonpilzes zurückführen lassen, in dem zwei Massen durch eine Elastizität verbunden gegeneinander schwingen, und daß eine Masse sehr häufig praktisch unendlich groß ist. Man kann bei Körpern mit stetiger

1) Unter elastischer Kraft verstehen wir den reziproken Wert der Elastizität.

2) U. a. M. Wien, Ann. d. Phys. **61**, 151, 1897.

Verteilung von Masse und Elastizität, wie Saiten, Membranen usw., sich immer die äquivalenten Massen und die äquivalente Elastizität berechnen und sich einen Tonpilz substituiert denken, der das betrachtete System schwingungstechnisch vollständig ersetzt, d. h. gleiche Resonanzfrequenz, Dämpfung, Amplitude, Verteilung der Schwingungsenergie usw. hat. Erleichtert schon bei den einfachen Schwingungskörpern diese gedankliche Hilfskonstruktion die Vorausberechnung und den Bau der Schwingungskörper mit bestimmten gewünschten Eigenschaften im hohen Maße, so wird sie fast unentbehrlich, wenn kompliziert zusammengesetzte Schwingungsgebilde vorliegen. Durch den gedanklichen Aufbau der einzelnen Schwingungskörper in Pilzform schafft man sich ein akustisches Schaltungsschema und kann die entscheidenden Größen berechnen, wozu besonders die Kopplungskoeffizienten gehören, die bei doppel- und mehrwelligen Gebilden das Verhalten des Systems in hohem Maße bestimmen.

Aber nicht nur als Berechnungsglied und als Mittel, den akustischen Aufbau von zusammengesetzten Schwingungsgebilden zu studieren, ist der Tonpilz für uns bedeutungsvoll geworden, sondern er ist direkt, in körperlicher Gestalt, zum Bau von Schallapparaten von uns verwandt worden. Hierdurch ist es uns gelungen, Schallerzeuger[1]) für Wasser für große Leistungen und gute Wirkungsgrade herzustellen. Bei akustischen Versuchen und in der technischen Akustik wird in Zukunft der Tonpilz mit Vorteil die Stelle von anderen, bisher gebräuchlichen Schwingungskörpern einnehmen und seine großen Vorzüge der Einfachheit der Berechnung und Erreichung gewünschter Eigenschaften bezüglich Abstimmung, Übersetzung, Kopplung und Dämpfung geltend machen können.

Zusammenfassung.

Im Vorstehenden ist der „Tonpilz", ein akustischer Schwingungskörper, in dem die Schwingungsgrößen — Masse und Elastizität — klar und eindeutig getrennt sind, näher beschrieben. Alle vorkommenden Schwingungsgebilde lassen sich auf einen oder mehrere miteinander gekoppelte Tonpilze zurückführen und auf diese Weise ihr akustisches Schaltungsschema entwerfen. Für einen einfachen Fall der Kopplung sind die Formeln zur Berechnung des Kopplungskoeffizienten und der gekoppelten Schwingungszahlen abgeleitet.

1) Eine genauere Beschreibung dieser Apparate wird an anderer Stelle erfolgen.

(Eingegangen 17. November 1919.)

BESPRECHUNGEN.

Max Planck, Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper, zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht, 8°. IV u. 193 S. Mit 12 Figuren. Leipzig, S. Hirzel. 1919. Preis geheftet M. 12.55, geb. M. 21.75.

Der vorliegende Band bildet gewissermaßen die Fortsetzung des neuerdings in zweiter Auflage bei Hirzel erschienenen Buches „Einführung in die allgemeine Mechanik" desselben Verfassers und ist in dem gleichen Sinne bearbeitet. (Besprechung der ersten Auflage des ersten Bandes: diese Zeitschr. **18**, 167, 1917.)

Seine Eigenart liegt darin, daß es eine wirklich brauchbare Einführung ist, die sich nicht an irgendein traditionelles Schema bindet, sondern mit einem bemerkenswerten Lehrgeschick dem Leser eine Grundlage bietet, die ihn zum Studium größerer Werke befähigen wird. Ohne ermüdende Breite ist die Darstellung so gehalten, daß der Anfänger nicht durch Schwierigkeiten formaler oder begrifflicher Art an der Durcharbeitung des Buches gehindert wird. Bei den Ableitungen werden nicht immer die kürzesten, sondern die lehrreichsten Wege gewählt. Vielleicht hätte die Darstellung teilweise durch stärkere Benutzung der Vektorenrechnung noch an Übersichtlichkeit gewonnen, doch ist das mehr oder weniger Geschmackssache. Der Stoff ist in drei Teilen behandelt: I. Allgemeine Bewegungsgesetze eines stetig ausgedehnten Körpers; II. Unendlich kleine Deformationen; III. Endliche Deformationen. Das ausgezeichnete Werk wird sich zweifellos bald einführen. H. Hörig.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Charlottenburg Fabrikdirektor M. Freiberg für Textilchemie.

Berufen: Der ord. Professor für angewandte Chemie an der Universität Würzburg Dr. Alfred Heiduschka zum ord. Professor für Lebensmittelchemie an der Technischen Hochschule Dresden.

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie und chemischen Technologie an der Universität Frankfurt a. M. Geh. Regierungsrat Dr. Martin Freund.

Gesuche.

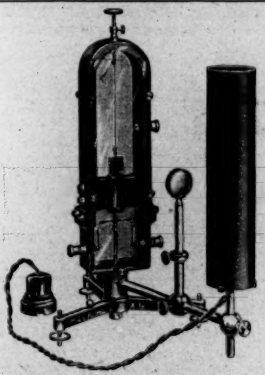
Physikerin

Dr. phil. nat. mit guten Kenntnissen in der Elektrotechnik — seither als Assistentin tätig — sucht passende Anstellung im In- oder Ausland. Angebote unter **S. H. 562** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

Experimentier-Schalttafeln

Projektions-Apparate

Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

PHYWE

Physikalische Werkstätten, G.m.b.H.

Göttingen 1 bauen als Sondererzeugnis

Sämtliche Apparate zur Einführung in das Gebiet der elektrischen Schwingungen sowie Demonstrations- und Spiegelgalvanometer

in einfachen, besonders preiswürdigen Ausführungsformen.

Man verlange Preisblätter.

Prismen, Linsen, Platten

aus

Kalkspat, Flußspat, Quarz, Steinsalz, Glas.

Gyps- und Glimmerpräparate.

Preisliste gratis.

R. Halle Nachfolger, Optisches Institut.

Berlin-Steglitz.

Въ современныхъ, новыхъ государства потребуются въ такихъ современныхъ, но общеизвѣстныхъ приборахъ какъ

Барреттеръ измерительный приборъ Гати для высокихъ напряженіе и для телефона.

Цѣна Руб. 250 —

Béla Gáti,

Budapest IX, Gyáli-ut. 22.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)

Seite

Arithmetisches Mittel: Das Verhältnis des mittleren Fehlers des — zu dessen wahrem Fehler bei der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, v. H. Vater 216
Atmosphäre: Über einen ionenbildenden Effekt in den obersten Schichten der —, v. W. Hammer . . . 218
Atombau und Spektrallinien, v. A. Sommerfeld. (B.) . 223
Atome: Neuere Anschauungen über die chemischen Elemente und ihre —, v. E. Kohlweiler . . . 203
Ausgleichungsrechnung: Das Verhältnis des mittleren Fehlers des arithmetischen Mittels zu dessen wahrem Fehler bei der — nach der Methode der kleinsten Quadrate, v. H. Vater 216
Chemische Elemente: Neuere Anschauungen über die — und ihre Atome, v. E. Kohlweiler 203
Effekt: Über einen ionenbildenden — in den obersten Schichten der Atmosphäre, v. W. Hammer . . . 218
Ettenreich, R., Eine Schwebungsmethode zur Prüfung der Trägheit von Kontaktdetektoren 208
Flamme: Bemerkung zu der „schallempfindlichen —" von Heinrich Mache, v. H. Kost 223
Floch, P., u. E. Nesper, Erwiderung zu der Bemerkung von Telefunken 223
Gesellschaft für drahtlose Telegraphie m. b. H. Berlin, Bemerkung zu der Notiz von E. Nesper und P. Floch „Universalröhreninstrumentarium" 223
Hammer, W., Über einen ionenbildenden Effekt in den obersten Schichten der Atmosphäre 218
Kapazitätsmeßbrücke: Wellenmesser mit —, v. F. Kock 214

Seite

Himmel: Über die Helligkeitsverteilung des diffusen Sonnenlichtes am klaren —, v. M. Uibe. (B.) . 224
Kock, F., Wellenmesser mit Kapazitätsmeßbrücke . . 214
Kohlrausch, K. W. F., Die Streuung der γ-Strahlen 193
Kohlweiler, E., Neuere Anschauungen über die chemischen Elemente und ihre Atome 203
Kontaktdetektoren: Eine Schwebungsmethode zur Prüfung der Trägheit von Kontaktdetektoren, v. R. Ettenreich 208
Kost, H., Bemerkung zu der „schallempfindlichen Flamme" von Heinrich Mache 223
Kröncke, H., Ein rechnerisches Verfahren zur Ermittelung des Spektrums der Röntgenstrahlen . . 220
Mache: Bemerkung zu der „schallempfindlichen Flamme" von Heinrich —, v. H. Kost 223
Nesper, E., u. P. Floch, Erwiderung zu der Bemerkung von Telefunken 223
Nürnberger, O., Die Bestimmung der Radioaktivität von Quellwässern 198
Quellwässer: Die Bestimmung der Radioaktivität von —, v. O. Nürnberger 198
Röntgenstrahlen: Ein rechnerisches Verfahren zur Ermittelung des Spektrums der —, v. H. Kröncke . 220
Schwebungsmethode: Eine — zur Prüfung der Trägheit von Kontaktdetektoren, v. R. Ettenreich . . . 208
Sommerfeld, A., Atombau und Spektrallinien. (B.) 223
Sonnenlicht: Über die Helligkeitsverteilung des diffusen — am klaren Himmel, v. M. Uibe. (B.) . . . 224
Spektrallinien und Atombau, v. A. Sommerfeld. (B.) 223
γ-Strahlen: Die Streuung der —, v. K. W. F. Kohlrausch 193
Uibe, M., Über die Helligkeitsverteilung des diffusen Sonnenlichtes am klaren Himmel. (B.) 224
Vater, H., Das Verhältnis des mittleren Fehlers des arithmetischen Mittels zu dessen wahrem Fehler bei der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate 216
Wellenmesser mit Kapazitätsmeßbrücke, v. F. Kock . 214

Richard Müller-Uri, Braunschweig Schleinitzstr. 19

Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.

Neuheiten: **Coulombmeter** nach Stephan D.R.G.M. — **Righis Röhren für magnetische Strahlen** mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — **Quecksilber-Schnellpumpe.** — **Präzisions-Vakuometer** D.R.G.M. — **Pizzarello-Apparat.** — **Apparate für flüssige Luft.** — **Verflüssigte Gase in Röhren.** — **Projektions- und Extrem-Thermometer.** — **Elektroskope** und **Trockensäulen.** — **Vakuumröhren** nach Braun, Crookes Geißler, Puluj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — **Leuchtschirme.** — **Normal-Geißlerröhren-Serie** „Kompendium". — **Original-Vakuumskalen** nach Croß.

Verschiedene **Quecksilber-Turbinen-Unterbrecher, Funkeninduktoren,** sowie andere elektro-physikalische Apparate, tadellos erhalten **preiswert zu verkaufen.** Offerten unter **S. H. 563** befördert der Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2.

Neuste Konstruktion!

Kugelspiegel. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.